

Πρόλογος της 1^{ης} έκδοσης

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως στους φοιτητές των Α.Ε.Ι. και Τ.Ε.Ι., αλλά και σε οποιονδήποτε που θα επιθυμούσε να έρθει σε επαφή με την Μαθηματική επιστήμη και να εμβαθύνει σ' αυτή. Αξίζει να αναφερθεί ότι συντάχθηκε για πρώτη φορά το 1990, εξ' ολοκλήρου χειρόγραφο, για να εξυπηρετήσει τις εκπαιδευτικές ανάγκες του τότε ΤΕΙ Λάρισας, ειδικότερα του τμήματος Πολιτικών – Έργων Υποδομής, όπου το αντίστοιχο μάθημα αποτελούσε αντικείμενο διδασκαλίας μου.

Η πρώτη αυτή έκδοση βελτιώθηκε πολύ, όταν το 2004 επανεκδόθηκε σε ηλεκτρονική μορφή, προστέθηκε περισσότερη ύλη και αναρτήθηκε διαδικτυακά στα πλαίσια του εκσυγχρονισμού και της αναβάθμισης του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών (Π.Π.Σ.) του προγράμματος Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ. (Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης).

Έκτοτε, εξαιτίας των αυξανόμενων εκπαιδευτικών αναγκών, έγινε πέρυσι μια τρίτη μεγάλη προσπάθεια βελτίωσης και ανανέωσης της ύλης. Το αρχικό βιβλίο διπλασιάστηκε. Προστέθηκαν νέα κεφάλαια τα οποία υπήρχαν πρώτα σε εκπαιδευτικές σημειώσεις και όλο το βιβλίο εμπλουτίστηκε με περισσότερα λυμένα παραδείγματα που καλύπτουν ολόκληρο το φάσμα της αντίστοιχης θεωρίας. Επίσης, στην πλειψηφία των ασκήσεων που παρουσιάζονται παρατίθενται και οι αντίστοιχες απαντήσεις και μάλιστα σε πολλές απ' αυτές δίνονται υποδείξεις, ώστε να προσφέρονται ευκολότερα για επίλυση και αυτενέργεια.

Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε να παρουσιαστεί κατά τρόπο κατανοητό η πλήρης θεωρία των κεφαλαίων που υπάρχουν στα πλαίσια του εκπαιδευτικού προγράμματος, χωρίς πλατειασμούς με πολλά θεωρήματα και αποδείξεις. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου κρίθηκε σκόπιμο να δοθεί περαιτέρω ανάλυση, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός καμπυλότητας και στρέψης μιας καμπύλης, η εξαγωγή εξισώσεων εγγύτατου και ευθαιοποιού επιπέδου, η απόδειξη θεωρημάτων του *Green* (στο επίπεδο και στο χώρο), του *Stokes*, κ.ά. τα οποία χρήζουν ιδιαίτερης επεξήγησης και εμβάθυνσης.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο 1^ο και το 2^ο εξάμηνο δεν είναι εύκολη. Ο διδάσκων οφείλει, όχι μόνο να καταστήσει κατανοητές τις έννοιες των Μαθηματικών αυτές καθαυτές, αλλά και να πείσει τους διδασκόμενους για την αναγκαιότητά τους

στην επιστήμη που ακολουθούν. Στο βιβλίο αυτό, η πληθώρα λυμένων εφαρμογών σε κάθε ενότητα καθιστά τη θεωρία περισσότερο κατανοητή και εύληπτη, ώστε όχι μόνο αυτή να εμπεδωθεί πλήρως, αλλά και να παρέχει στον αναγνώστη ένα σημαντικό κίνητρο προσπάθειας περαιτέρω εξάσκησης μέσω των προτεινόμενων ασκήσεων που προσφέρονται για επίλυση. Η απάντηση των ασκήσεων αποτελεί δείκτη αξιολόγησης της προσπάθειας του ενασχολούμενου, που συντελεί στην αύξηση της αυτοπεποίθησης και ικανοποίησης, απαραίτητα στοιχεία για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και επιστήμης.

Το βιβλίο χωρίζεται σε 8 ενότητες (κεφάλαια). Ο τίτλος του υποδεικνύει πως αποτελεί συνέχεια των Μαθηματικών Ι τα οποία αναφέρονται κυρίως στον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Εισαγωγή του εγχειριδίου αποτελούν οι Διαφορικές Εξισώσεις, όπου παρουσιάζονται οι πιο απλές μορφές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, με πλήρη θεωρία και λυμένες ασκήσεις, καθώς και πολλές τεχνολογικές εφαρμογές. Και τούτο γιατί οι Διαφορικές Εξισώσεις θεωρούνται από τους μαθηματικούς ως το σημαντικότερο και «ωριότερο» θα έλεγε κανείς εργαλείο των Μαθηματικών σε όλες τις εκφάνσεις των φυσικών, πειραματικών και τεχνολογικών επιστημών.

Εξαιτίας του ότι η λύση των Διαφορικών Εξισώσεων απαιτεί επαρκή γνώση των ολοκληρωμάτων, (τα οποία συνήθως διδάσκονται στα αρχικά στάδια των σπουδών), προστέθηκε στο τέλος του βιβλίου ένα κεφάλαιο (το 8^ο) ως παράρτημα, το οποίο αναφέρεται στην πλήρη θεωρία των απλών (μη πολλαπλών) ολοκληρωμάτων με τις εφαρμογές τους, ώστε να αποτελεί ένα ολοκληρωμένο βοήθημα για την επίλυση των Διαφορικών Εξισώσεων και όχι μόνο. (Προτείνεται από τον συγγραφέα, για την καταλληλότερη προετοιμασία και αποτελεσματικότητα της μελέτης, ο αναγνώστης να ξεκινήσει τη μελέτη του βιβλίου από το 8^ο κεφάλαιο).

Στο 2^ο κεφάλαιο τίγονται θέματα που αναφέρονται στο Διαφορικό Λογισμό συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών, όπως μερικές παράγωγοι και ολικά διαφορικά συναρτήσεων. Επίσης, παρουσιάζεται λεπτομερειακά η ολοκλήρωση ολικών διαφορικών, που αποτελεί σημαντικό συμπλήρωμα των διαφορικών εξισώσεων του 1^{ου} κεφαλαίου. Στο τέλος γίνεται σύντομη αλλά ουσιαστική περιγραφή των επιφανειών 2^{ου} βαθμού, που καλύπτουν ένα μεγάλο μέρος του βιβλίου, κυρίως στη λύση παραδειγμάτων με ολοκληρώματα.

Το 3^ο κεφάλαιο περιέχει αποκλειστικά τα ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, με όλες τις συνηθισμένες περιπτώσεις και δεσμεύσεις που παρουσιάζονται και με εφαρμογές αυτών σε πολλούς επιστημονικούς τομείς.

Στο 4^ο κεφάλαιο γίνεται πλήρης ανάλυση και περιγραφή των διπλών, τριπλών και γενικευμένων ολοκληρωμάτων, με εφαρμογές των δύο πρώτων στη Μηχανική. Αναφέρεται ακόμη διεξοδικά η χρήση και σπουδαιότητα των κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων στην επίλυση διπλών και τριπλών ολοκληρωμάτων, με πλούσια παρουσίαση λυμένων παραδειγμάτων και πολλών σχημάτων.

Το 5^ο κεφάλαιο αναφέρεται στη διανυσματική ανάλυση και τη θεωρία καμπύλων και επιφανειών, όπου γίνεται σύντομη περιγραφή των καμπύλων του χώρου και των επιφανειών στη διανυσματική τους μορφή. Επίσης περιγράφονται ιδιότητες και χαρακτηριστικά καμπύλων, όπως συνοδεύον τριέδρο, καμπυλότητα, στρέψη, καθώς και παρόμοια χαρακτηριστικά επιφανειών, όπως καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και θεμελιώδη ποσά 1^{ης} τάξης. (Δεν αναφέρονται τα θεμελιώδη ποσά 2^{ης} τάξης γιατί θα «βάρυνε» το περιεχόμενο του βιβλίου).

Στο 6^ο κεφάλαιο γίνεται λεπτομερής αναφορά στα επικαμπύλια και επιεπιφάνεια ολοκληρώματα, τα οποία αποτελούν γενίκευση των συνήθων ολοκληρωμάτων και τα οποία έχουν τεράστιες εφαρμογές στη Γεωμετρία, Φυσική, Μηχανική και άλλες επιστήμες. Δίνεται επίσης ιδιαίτερη προσοχή και ανάλυση στα θεωρήματα *Green* (στο επίπεδο και στο χώρο), καθώς και στο θεώρημα *Stokes*, με πλήρεις αποδείξεις αυτών και πολλές εφαρμογές.

Το τελευταίο κεφάλαιο περιγράφει αποκλειστικά τις σειρές *Fourier* (ανάπτυξη συναρτήσεων σε τριγωνομετρικές σειρές) σε απλή μορφή με πολλά παραδείγματα. Οι σειρές *Fourier*, μαζί με τους μετασχηματισμούς *Fourier*, *Laplace* και *Z*, θεωρούνται πολύ σημαντικά βοηθήματα για την απλοποίηση και επίλυση δύσκολων προβλημάτων στη σύγχρονη Τεχνολογία, ιδίως στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (Σ.Α.Ε.).

Με την περιγραφή των επιμέρους ενοτήτων καταβλήθηκε προσπάθεια, όχι μόνο για την ολοκληρωμένη παρουσίαση της θεωρίας και των παραδειγμάτων, αλλά και για τη σχεδίαση των πολλών και προσεγμένων σχημάτων, τα οποία αποτελούν αντικείμενο ιδιοχείρους σχεδίασης (αποφεύγοντας την χρήση έτοιμων σχεδιαστικών προγραμμάτων), για να καταδειχθούν καλύτερα περισσότερες λεπτομέρειες σε ό,τι αυτά αφορά.

Για πρακτική εξάσκηση και άμεση εξαγωγή αποτελεσμάτων, κυκλοφορούν στο εμπόριο έτοιμα πακέτα μαθηματικών προγραμμάτων για Η/Υ τα οποία υπολογίζουν οτιδήποτε σχετίζεται με Ανώτερα Μαθηματικά, όπως:

- Γραφικές παραστάσεις στο επίπεδο ή στο χώρο και με οποιεσδήποτε συντεταγμένες, π.χ. καρτεσιανές, πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές, κ.τ.λ.
- Εύρεση παραγώγων συναρτήσεων οποιασδήποτε τάξης, με μία ή περισσότερες μεταβλητές και επίλυση ολοκληρωμάτων ορισμένων ή αορίστων.
- Διαφορικές εξισώσεις, οποιασδήποτε γνωστής μορφής,
- Επίλυση οποιωνδήποτε εξισώσεων ή συστημάτων με προσεγγιστικές λύσεις,
- Όρια συναρτήσεων, αθροίσματα σειρών, παραγοντοποιήσεις,
- Διανύσματα, πίνακες, ορίζουσες και πολλά άλλα θέματα.

Επίσης, τα προγράμματα αυτά περιέχουν και έτοιμες συναρτήσεις που διευκολύνουν στην επίλυση πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων.

Μερικά από τα προγράμματα είναι τα παρακάτω:

1. **Derive for Windows**, εξαιρετικά ευέλικτο και φιλικό στο χρήστη πρόγραμμα,
2. **Mathematica**, που θεωρείται από τα δυναμικότερα και πληρέστερα στο είδος του, με καταπληκτικές δυνατότητες,
3. **Matlab** με πάρα πολλές τεχνολογικές εφαρμογές,
4. **Mathcad** που ξεχωρίζει για τις γραφικές του παραστάσεις και όχι μόνο,
5. **Maple** με πάρα πολλές έτοιμες συναρτήσεις, και άλλα.

Η προσαρμογή της εσωτερικής εμφάνισης του βιβλίου αυτού έγινε με τις φιλότιμες προσπάθειες του κ. *Κώστα Καλαϊτζή*, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά στο σημείο αυτό, που επιμελήθηκε με ιδιαίτερη φροντίδα ολόκληρη τη σελιδοποίηση. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. *Μαρία Καραμολέγκου* που φιλοτέχνησε την εξωτερική παρουσίαση του βιβλίου, τις εκδόσεις *Δίσιγμα* και ιδιαίτερα τον εκδότη κ. *Ιωάννη Μούργκο*, ο οποίος με τον συνεργάτη του κ. *Άγγελο Στορδόπουλο* φρόντισαν με κάθε λεπτομέρεια την καλαίσθητη έκδοση του βιβλίου αυτού. Τέλος, θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την συμπαράσταση, ενθάρρυνση και ανοχή της όλο αυτό το διάστημα, στην οποία αξίζει και η αφιέρωση του βιβλίου αυτού.

Οποιοσδήποτε υποδείξεις ή παρατηρήσεις, που αφορούν στη διόρθωση ή στη βελτίωση του παρόντος βιβλίου, είναι ευπρόσδεκτες και θα τύχουν ιδιαίτερης προσοχής και μελέτης.

Τέλος, ευελπιστώ το βιβλίο αυτό να αποτελέσει σημαντικό βοήθημα στους αναγνώστες, όσον αφορά στην κατανόηση των μαθηματικών θεμάτων που πραγματεύεται, και αυτό για μένα θα αποτελεί ανεκτίμητη ηθική ικανοποίηση του κόπου και της συνολικής μου προσπάθειας.

Λάρισα, Φεβρουάριος 2014

Θεόδωρος Γ. Λόκκας

Καθηγητής του ΤΕΙ Θεσσαλίας

Πρόλογος της 2^{ης} έκδοσης

Η δεύτερη έκδοση του παρόντος βιβλίου «Μαθηματικά II» περιλαμβάνει δύο νέα στοιχεία πολύ ουσιαστικά, τα οποία κατέστησαν επιβεβλημένη την δεύτερη έκδοση. Το πρώτο στοιχείο αναφέρεται στο ριζικό επανασχεδιασμό του πρώτου κεφαλαίου των Διαφορικών Εξισώσεων αλλά και τον εμπλουτισμό αυτού με νέες παραγράφους, ενώ το δεύτερο στοιχείο αναφέρεται στην πρόσθεση ενός νέου και πολύ σημαντικού κεφαλαίου, όγδοου στη σειρά, των Μετασχηματισμών Laplace.

Συγκεκριμένα, στο 1^ο κεφάλαιο των Διαφορικών εξισώσεων, εκτός των βελτιωτικών τροποποιήσεων που έγιναν, προστέθηκαν περισσότεροι παράγραφοι που αφορούν σε επιπλέον περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων, όπως διαφορικές εξισώσεις *Lagrange* και *Clairaut*, με συνέπεια να εμπλουτίζεται περισσότερο η ύλη του κεφαλαίου. Με τη βοήθεια των εξισώσεων αυτών δόθηκε επίσης εκτενής αναφορά στις *ιδιάζουσες λύσεις* μιας διαφορικής εξίσωσης, κάτι που δεν είχε αναφερθεί πριν. Επιπλέον δε, επανασχεδιάστηκαν από την αρχή οι παράγραφοι που αναφέρονταν σε διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές 2^{ης} τάξης με μηδενικό ή μη το 2^ο μέλος. Η επανασχεδίαση αυτών γενικεύεται σε διαφορικές εξισώσεις n – στής τάξης ομογενείς ή μη (οι οποίες προφανώς εμπεριέχουν τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης) και οι διάφορες περιπτώσεις που εξετάζονται, αναφέρονται πάντα σε διαφορικές εξισώσεις της κατηγορίας αυτής. Αλλά και το μέρος των τεχνολογικών εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων εμπλουτίστηκε με νέες και ενδιαφέρουσες εφαρμογές οι οποίες αναδεικνύουν τις διαφορικές εξισώσεις ως απαραίτητο βοήθημα για την επίλυση τεχνολογικών προβλημάτων και πολλών άλλων των πειραματικών και φυσικών επιστημών.

Το κεφάλαιο των Μετασχηματισμών Laplace (ML) προστέθηκε ως όγδοο στη σειρά, ως φυσικό επακόλουθο του εβδόμου κεφαλαίου που αναφέρεται στις σειρές Fourier, κι' αυτό γιατί σχετίζεται άμεσα με αυτό. (Εκτός των σειρών Fourier υπάρχουν και οι μετασχηματισμοί Fourier). Το κεφάλαιο των μετασχηματισμών Laplace είναι ένα ιδιαίτερα σπουδαίο 'εργαλείο' των Μαθηματικών, έχει πολύ άμεση εφαρμογή σ' όλες τις τεχνολογικές επιστήμες, ιδιαίτερα αυτές των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, γι' αυτό και αποτελεί μέρος της διδασκαλίας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών σε ανώτερα εξάμηνα σπουδών των Θετικών Επιστημών. Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε η παρουσίαση των μετασχηματισμών Laplace να είναι όσο το δυ-

νατόν πλήρης και με φυσική αλληλουχία. Έτσι, παρουσιάζονται όλες οι συνήθεις περιπτώσεις των (ML) με πολλά λυμένα παραδείγματα που καλύπτουν πλήρως την αντίστοιχη θεωρία και πολλές επίσης ασκήσεις προς λύση με τις απαντήσεις τους πάντα. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε στον τομέα των εφαρμογών των μετασχηματισμών Laplace και ιδίως στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, καθώς επίσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, ακόμη δε ολοκληρωτικών και ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων. Σε πολλές δε περιπτώσεις τα παραδείγματα που ελήφθησαν προς επίλυση ήταν τα ίδια με αυτά που αναφέρονται και στο 1^ο κεφάλαιο των διαφορικών εξισώσεων, έτσι ώστε να γίνεται εμφανής η διαφορά επίλυσης αυτών και συνεπώς η αξία των Μετασχηματισμών Laplace.

Ευελπιστούμε η δεύτερη κατά πολύ εμπλουτισμένη έκδοση του βιβλίου αυτού να αποτελέσει χρήσιμο βοήθημα και να συμβάλλει στην περαιτέρω εμβάθυνση και κατανόηση των κεφαλαίων των Μαθηματικών που διαπραγματεύεται. Αυτό αποτελεί και τον απώτερο στόχο της προσπάθειας αυτής και η ηθική ικανοποίηση για μας θα είναι πραγματικά μεγάλη.

Οποιοσδήποτε παρατηρήσεις ή υποδείξεις είναι πάντα ιδιαίτερα ευπρόσδεκτες. Εξάλλου από τα λάθη του βελτιώνεται καθένας.

Λάρισα, Σεπτέμβριος 2016

Θεόδωρος Γ. Λόκκας

Τέως Καθηγητής του ΤΕΙ Θεσσαλίας