

Τεχνολογικό **Ε**κπαιδευτικό **Ι**δρυμα **Λ**άρισας
Σχολή: **Τ**εχνολογικών **ΕΦ**αρμογών

Τμήμα: Πολιτικών - Έργων Υποδομής

Αρχές και Μέθοδοι στη ΣΤΑΤΙΚΗ

Δρ Φιλοθέου Γ. Λόκκα
Πολιτικού Μηχανικού ΕΜΠ
Τακτικού Καθηγητή ΤΕΙ/Λ



Λάρισα, Οκτώβριος 2006

Αφιερώνεται

στην οικογένειά μου.

Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	6
Εισαγωγή.....	7
Κεφάλαιο 1.....	10
Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής.....	10
1.1 – Η δύναμη	12
1.2 – Τύποι συστημάτων δυνάμεων	14
1.3 – Ροπή δύναμης ως προς σημείο και άξονα	14
1.4 – Συνισταμένη και συνιστώσες	15
1.5 – Σύνθεση και ανάλυση δύναμης	15
1.6 – Παραλληλόγραμμο δυνάμεων	15
1.7 – Δυναμοπολύγωνο.....	16
1.8 – Ζεύγος δυνάμεων.....	16
1.9 – Δράση και αντίδραση.....	17
1.10 – Φορέας, ελεύθερος και πλήρης.....	18
1.11 – Εξωτερικές δυνάμεις.....	19
1.12 – Στηρίξεις	20
1.13 – Ισοστατικοί και υπερστατικοί φορείς.....	21
Κεφάλαιο 2.....	25
Δυνάμεις στο επίπεδο - Γραφοστατική.....	25
2.1 – Σύνθεση συνεπιπέδων συντρεχουσών δυνάμεων	25
2.2 – Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις.....	26
2.3 – Παραδείγματα.....	28
2.4 – Προσδιορισμός αντιδράσεων	30
2.4.1 – Παράδειγμα.....	32
2.5 – Σχοινοπολύγωνα της ίδιας ομάδας.....	33
2.6 – Σχοινοπολύγωνο δια τριών σημείων	34
2.7 – Παραδείγματα.....	37
2.8 – Συνθήκες ισορροπίας.....	40
Κεφάλαιο 3^ο.....	42
Αναλυτικές μέθοδοι.....	42
3.1 – Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις	42
3.2 – Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις.....	43

3.3 – Παράδειγμα.....	44
3.4 – Δυνάμεις στο χώρο.....	45
3.5 – Παραδείγματα.....	48
Κεφάλαιο 4ο	54
Κέντρα βάρους	54
4.1 – Κεντροειδές επιφανειών.....	54
4.2 – Παράδειγμα.....	56
4.3 – Θεωρήματα των Πάππου – Guldin	59
Κεφάλαιο 5ο	65
Ροπές αδράνειας.....	65
5.1 – Ροπή αδράνειας ως προς άξονα.....	65
5.2 – Ακτίνα αδράνειας	69
5.3 – Θεώρημα του παράλληλου άξονα (Steiner).....	70
5.4 – Παραδείγματα.....	71
5.5 – Πολική ροπή αδράνειας	74
5.6 – Φυγόκεντρη ροπή αδράνειας	76
5.7 – Φυσική σημασία των ροπών αδράνειας.....	77
Κεφάλαιο 6ο	78
Ισοστατικοί φορείς.....	78
6.1 – Η δοκός ως φορέας	79
6.2 – Οι στηρίξεις	81
6.3 – Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις.....	82
6.4 – Τα φορτία διατομής.....	85
6.5 – Σήμανση των φορτίων διατομής.....	86
6.6 – Παράδειγμα.....	88
6.7 – Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών q , Q & M	90
6.8 – Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M	92
6.9 – Παραδείγματα.....	96
6.10 – Γενικές παρατηρήσεις	108
6.11 – Δυσμενείς φορτίσεις	108
Κεφάλαιο 7ο	112
Επίπεδοι δικτυωτοί φορείς.....	112
7.1 – Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων	114
7.1.1 – Παράδειγμα.....	115

7.2 – Η γραφική μέθοδος Cremona	119
7.2.1 – Παράδειγμα.....	120
7.3 – Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter)	125
7.3.1 – Παραδείγματα.....	127
Κεφάλαιο 8ο	136
Τριαρθρωτοί φορείς	136
8.1 – Υπολογισμός των αντιδράσεων	136
8.2 – Υπολογισμός της έντασης	139
8.3 – Παράδειγμα.....	140
Κεφάλαιο 9ο	142
Τριβή.....	142
9.1 – Γωνία τριβής.....	143
9.2 – Τριβή κύλισης.....	143
9.3 – Προσδιορισμός της τριβής κύλισης.....	144
9.4 – Μέτρηση του συντελεστή τριβής κύλισης.....	145
9.5 – Παράδειγμα.....	146
Κεφάλαιο 10ο.....	151
Αρχή των δυνατών έργων	151
10.1 – Δυνατές μετατοπίσεις	151
10.2 – Δυνατά έργα.....	153
10.3 – Η αρχή των δυνατών έργων	155
10.4 – Παραδείγματα	156
10.5 – Απόδοση απλών μηχανών.....	160
10.6 – Παραδείγματα	162
Ευρετήριο	167
Ελληνικό.....	167
Ξενόγλωσσο	170
Βιβλιογραφία	171

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί καρπό του προγράμματος «Αναμόρφωση Προπτυχιακών Προγραμμάτων Σπουδών» του ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ και προορίζεται να χρησιμοποιηθεί από τους σπουδαστές που παρακολουθούν το μάθημα της Στατικής, στο Β' εξάμηνο σπουδών του Τμήματος Πολιτικών - Έργων Υποδομής της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ της Λάρισας.

Τα βιβλία της Στατικής που κατά καιρούς είχαν εκδοθεί από τον ΟΕΔΒ του Υπουργείου Παιδείας γράφηκαν για να εξυπηρετήσουν τις τότε ανάγκες των ΚΑΤΕΕ. Έτσι ο εκάστοτε συγγραφέας καθόριζε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο διδακτέας ύλης του μαθήματος, το οποίο αντικατόπτριζε μάλλον τις προσωπικές του εκτιμήσεις.

Σήμερα όμως, που η διδακτέα ύλη του μαθήματος διαμορφώνεται από τον υπεύθυνο καθηγητή του Τομέα Μαθημάτων μέσα στα πλαίσια του περιγράμματος σπουδών του ΥΠΕΠΘ, είναι φανερό ότι προκύπτει επιτακτικά η ανάγκη μιας υπεύθυνης συγγραφής ενός σπουδαστικού βοηθήματος για το κάθε διδασκόμενο μάθημα.

Καταβλήθηκε ξεχωριστή προσπάθεια ώστε να καλύψει την εγκριθείσα από το Τμήμα Πολιτικών - Έργων Υποδομής προβλεπόμενη διδακτέα ύλη, χωρίς να επεκτείνεται σε θέματα θεωρητικού ή εξεζητημένου χαρακτήρα.

Για την καλύτερη κατανόηση του θεωρητικού μέρους, δόθηκαν εκλεκτικά αντίστοιχα παραδείγματα. Γενικότερη όμως επιδίωξη ήταν, τόσο η ανάπτυξη της θεωρίας όσο και η παράθεση των αντιστοίχων σχημάτων και παραδειγμάτων να γίνουν με **απλότητα** και **σαφήνεια**, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη αφομοίωση του μαθήματος από τους σπουδαστές.

Με την ελπίδα ότι οι παραπάνω στόχοι μου έχουν κατά ένα μεγάλο μέρος επιτευχθεί, παραδίδω το βιβλίο αυτό στους σπουδαστές αντιστοίχων τμημάτων των ΤΕΙ, δεχόμενος κάθε καλόπιστη κριτική που θα μπορούσα να τη χρησιμοποιήσω μελλοντικά.

Λάρισα, Μάιος 2004

Δρ Φιλόθεος Γ. Λόκκας
Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ
Αντιπρόεδρος ΤΕΙ/Λάρισας

Εισαγωγή

Μηχανική είναι η εφαρμοσμένη φυσική επιστήμη που ασχολείται με σώματα τα οποία βρίσκονται σε ηρεμία ή κίνηση κάτω από την επίδραση δυνάμεων.

Ανάλογα με τη φυσική κατάσταση των σωμάτων που εξετάζει, διακρίνεται στη:

- α) Μηχανική των στερεών
- β) Μηχανική των υγρών και
- γ) Μηχανική των αερίων.

Η Μηχανική των στερεών μελετά την ισορροπία, την εντατική κατάσταση και την κίνηση των **φορέων**, δηλαδή των σωμάτων που φορτίζονται. Ειδικότερα, ανάλογα με το αντικείμενο της μελέτης της, διακρίνουμε:

Α. Τη Στατική που εξετάζει γενικά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένας φορέας **στέκεται**, δηλαδή ισορροπεί. Σαν προέκταση της Στατικής θεωρείται η **Αντοχή των Υλικών**, που μελετά ειδικότερα τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους φορείς που καταπονούνται, πάντα σε συνδυασμό με τις παραμορφώσεις που προκαλούνται. Θεωρεί τα σώματα όπως πραγματικά είναι στη φυσική τους κατάσταση, δηλαδή ελαστικά και όχι απαραμόρφωτα όπως στη Στατική, καθορίζοντας ανώτατα επιτρεπόμενα όρια φορτίων – παραμορφώσεων.

Τα συμπεράσματα της ευρύτερης στατικής μελέτης εφαρμόζονται γενικά στις κατασκευές των τεχνικών έργων, όπου προσδιορίζονται οι διαστάσεις των διαφόρων μερών της μετά από υπολογισμό των δυνάμεων που τα επιβαρύνουν, έτσι ώστε οι κατασκευές να είναι ασφαλείς, οικονομικές και χωρίς απαράδεκτες παραμορφώσεις.

Β. Τη Δυναμική που μελετά την κίνηση των σωμάτων καθώς και τις δυνάμεις που συσχετίζονται με τα κινούμενα σώματα. Έτσι διαιρούμε τη Δυναμική:

1) Στην **Κινηματική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος χωρίς να εξετάζει τις δυνάμεις που την προκαλούν, οπότε οι σχέσεις που προκύπτουν είναι **χωρο – χρονικές**. Όταν π.χ. βλέπουμε έναν τροχό να κυλιέται σε ευθύγραμμη τροχιά με σταθερή ταχύτητα, ο καθορισμός του σχήματος της τροχιάς, που διαγράφει ένα σημείο της στεφάνης του καθώς κινείται, αλλά

και της θέσης του σημείου αυτού σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, είναι προβλήματα της Κινηματικής.

2) Στην **Κινητική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος λαμβάνοντας υπόψη τις δυνάμεις που την προκαλούν. Η εύρεση π.χ. του σταθερού ζεύγους που πρέπει να ασκηθεί στον άξονα ενός ρότορα, έτσι ώστε σε μια δοσμένη χρονική στιγμή να έχει μια συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, είναι πρόβλημα της Κινητικής.

Ενώ η συμβολή της Κλασσικής περιόδου στη Στατική είναι μεγάλη, η Δυναμική εδραιώθηκε σαν επιστήμη στο μεσαίωνα.

Μεγάλη υπήρξε η συμβολή των:

1. **Galileo Galilei** (1564 - 1642), ο οποίος διατύπωσε μια θεωρία στις δοκούς, η οποία αν και ανακριβής, προσδιόριζε τη σχέση μεταξύ φορτίου και διατομής σε δοκό ίσης αντοχής.
2. **Sir Isaac Newton** (1642 - 1727) ο οποίος, ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών, διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης των σωμάτων και τον περισπούδαστο νόμο της βαρύτητας.
3. **Jean Baptiste le Rond d' Alembert** (1717 - 1783) ο οποίος πρώτος διατύπωσε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας για το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης, ενώ μετά το 1768 εισήγαγε τη χρήση διαφορικών εξισώσεων που εκφράζουν τη δυναμική κατάσταση ενός κινούμενου σώματος, ιδιαίτερα σε περίπτωση σεισμού.
4. **Charles Auguste Coulomb** (1736 - 1806) και **Louis Marie Henri Navier** (1785 - 1836) οι οποίοι συνέλεξαν τις τότε διασκορπισμένες γνώσεις, τις ταξινόμησαν με κρίση, τις ανέπτυξαν περαιτέρω μεθοδικά και έδωσαν στη Στατική μια κατεύθυνση προς το μέλλον.
5. **Joseph-Louis Lagrange** (1736 - 1813) ο οποίος έκανε σημαντικές μελέτες στα πεδία της μαθηματικής ανάλυσης, της θεωρίας αριθμών και της κλασσικής και ουράνιας μηχανικής.
6. **Karl Culmann** (1821 - 1881) ο οποίος ανέπτυξε γραφικές μεθόδους της Στατικής καθώς επίσης και τη θεωρία των δικτυωμάτων με την παραδοχή των αρθρωτών κόμβων.
7. **Luigi Cremona** (1830 - 1903) ο οποίος δημιούργησε το περίφημο ομώνυμο διάγραμμα του, μέσω του οποίου είναι δυνατός ο γραφικός προσδιορισμός των δυνάμεων (τάσεων) των ράβδων ενός ισοστατικού δικτυώματος.

8. **Otto Mohr** (1835 - 1918) ο οποίος εφάρμοσε πρώτος την αρχή των δυναμικών μετακινήσεων, διατυπώνοντας μια αναλογία για τον υπολογισμό της ελαστικής γραμμής ράβδου.
9. **Wilhelm Ritter** (1847 - 1906) ο οποίος ανέπτυξε περαιτέρω την εφαρμογή της Στατικής με γραφικές μεθόδους, ιδιαίτερα πάνω στα δικτυώματα, με τις περίφημες τομές.
10. **Hardy Cross** (1885 - 1959) ο οποίος με την τότε πρωτοποριακή του μέθοδο (1930), σε συνδυασμό και με τη συμβολή του **Gaspar Kani** (1949) κατόρθωσε να επιλύσει στατικά αόριστους φορείς με τη βοήθεια της διαδοχικής προσέγγισης, διευκολύνοντας έτσι τον υπολογισμό.

Σημαντική θεωρείται επίσης και η συμβολή:

1. Του Ολλανδού Μαθηματικού, Φυσικού και Αστρονόμου **Christiaan Huygens** (1629 - 1695) πάνω σε θέματα Οπτικής, Μηχανικής και Αστρονομίας, καθώς και
2. Του Σκωτσέζου Φιλοσόφου και επιστήμονα της λογικής **William Hamilton** (1788 - 1856), αλλά και άλλων.

Σε σχέση με τη Στατική, η Δυναμική σαν επιστήμη καθυστέρησε ν' αναπτυχθεί. Η καθυστέρηση αυτή οφείλεται βασικά στη δυσκολία διεξαγωγής των αναγκαίων πειραμάτων.

Κεφάλαιο 1

Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής

Η Μηχανική σαν επιστήμη στηρίζεται σε ορισμένες βασικές αρχές που θέτουμε εκ των προτέρων από τα δεδομένα της εμπειρίας και του πειράματος, πάνω στις οποίες, με μαθηματικές μεθόδους, θεμελιώνουμε στη συνέχεια το οικοδόμημά της.

Οι αρχές αυτές απορρέουν από τις έννοιες του χρόνου, της μάζας και της δύναμης που θα περιγράψουμε πιο κάτω και αποκτούμε από την εμπειρία, αλλά και από την πειραματική μελέτη απλών κινήσεων. Είναι δηλαδή προτάσεις ή νόμοι, η ισχύς των οποίων δεν αποδεικνύεται αλλά διαπιστώνεται πειραματικά. Οι αρχές αυτές είναι τρεις:

1. Η αρχή της **αδράνειας**
2. Η αρχή της **ανεξαρτησίας του αποτελέσματος δυνάμεων** (αλλιώς αρχή της **επαλληλίας**)
3. Η αρχή της **ισότητας δράσης και αντίδρασης**.

Από αυτές οι δύο πρώτες αρκούν για να οικοδομηθεί η Μηχανική του υλικού σημείου. Η αρχή της ισότητας δράσης - αντίδρασης μας επιτρέπει να επεκταθούμε στη Μηχανική των υλικών Συστημάτων.

Η αρχή της αδράνειας διατυπώθηκε στην αρχαιότητα από τον Αριστοτέλη, αργότερα από το Da Vinci, Γαλιλαίο και με την οριστική της μορφή από το Νεύτωνα ως εξής:

«Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησής του, εφ' όσον δεν ενεργήσει σ' αυτό καμία εξωτερική δύναμη».

Η αρχή αυτή, στην οποία ο Νεύτων με την έννοια του σώματος θεωρεί το υλικό σημείο της σύγχρονης Μηχανικής, μπορεί να πάρει διαδοχικά τις παρακάτω διατυπώσεις:

- ✓ Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονωμένο (δηλαδή δεν δρα πάνω του καμία δύναμη), τότε η ταχύτητά του, ή είναι μηδέν ή διατηρείται σταθερή κατά μέτρο διεύθυνση και φορά.
- ✓ Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονωμένο, η επιτάχυνσή του είναι μηδέν.

- ✓ Αν υλικό σημείο έχει επιτάχυνση, θα βρίσκεται αναγκαστικά στην περιοχή άλλων υλικών σημείων ή σωμάτων που δρουν πάνω σ' αυτό.

Άρα όταν ένα σώμα Α, επιδρώντας σε σώμα Β, έχει σαν αποτέλεσμα να το επιταχύνει, θα λέμε στη Μηχανική ότι η δράση του Α πάνω στο Β είναι **δύναμη** που **προέρχεται** από το Α και **εφαρμόζεται** στο Β.

Ορίζουμε επομένως τη δύναμη σαν **αιτία της επιτάχυνσης**.

Όμως **τίποτα δε γνωρίζουμε πάνω στο μηχανισμό** κατά τον οποίο πραγματοποιείται η δράση του Α πάνω στην κίνηση του Β. Έτσι, ενώ λέμε π.χ. ότι ο ήλιος έλκει τη γη, τίποτα δε γνωρίζουμε για το μηχανισμό αυτής της έλξης.

Συμπεραίνοντας καταλήγουμε ότι η φύση της δύναμης μας είναι **άγνωστη** και κάθε έρευνα στον τομέα αυτό ανήκει στη Μεταφυσική.

Την έννοια της δύναμης αποκτούμε μόνο με τις αισθήσεις. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για να αποκτήσει ένα υλικό σημείο επιτάχυνση, θα πρέπει να δράσει πάνω του κάποια αιτία. Την αιτία αυτή ονομάζουμε δύναμη.

Προτού όμως εισέλθουμε στη μελέτη της Μηχανικής είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένες έννοιες της γενικής Φυσικής.

Χρόνος είναι η ποσότητα μέτρησης της διάρκειας ή της διαδοχής δύο γεγονότων. Στη Νευτώνεια Μηχανική θεωρείται ποσότητα απόλυτη (θετική).

Χώρος ή **Διάστημα** είναι ένα κενό που εκτείνεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Ο καθορισμός ενός σημείου στο διάστημα είναι σχετικός και γίνεται με γραμμικές και γωνιακές μετρήσεις ως προς ένα σύστημα αναφοράς το οποίο θεωρείται ακίνητο.

Ύλη είναι η ουσία που κατέχει κάποιο χώρο στο διάστημα.

Αδράνεια είναι η ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται στην αλλαγή της κινητικής της κατάστασης.

Μάζα είναι η ποσοτική μέτρηση της αδράνειας της ύλης.

Σώμα είναι η ύλη που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια.

Στερεό ή **συμπαγές σώμα** είναι ένα ιδεατό σώμα που δεν υφίσταται σχετικές παραμορφώσεις μεταξύ των μερών του. Επομένως διατηρεί το σχήμα του σταθερό.

Υλικό σημείο ονομάζεται σώμα, όχι κατ' ανάγκην μικρό, το οποίο όμως κατά την κίνησή του θεωρείται σαν μονάδα ύλης.

Είναι αυτονόητο ότι το υλικό σημείο είναι καθαρά θεωρητική έννοια η οποία όμως εξυπηρετεί πολύ στη λύση πολλών προβλημάτων. Έτσι στην

ουράνια Μηχανική, όπου οι αποστάσεις που εμφανίζονται είναι τεράστιες, η γη θεωρείται σαν υλικό σημείο με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο της.

Τροχιά είναι το σύνολο των διαδοχικών θέσεων που καταλαμβάνει ένα υλικό σημείο κατά την κίνησή του.

Στο βιβλίο αυτό της Μηχανικής θα μας απασχολήσει αποκλειστικά η **Στατική**, δηλαδή το μέρος εκείνο της Μηχανικής που ασχολείται με την **ισορροπία των σωμάτων** και έχει ως αντικείμενο την αναζήτηση και διατύπωση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες τα σώματα της φύσης, διατηρούν την ισορροπία τους κάτω από φόρτιση με οποιεσδήποτε εξωτερικές δυνάμεις.

1.1 – Η δύναμη

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η δύναμη, μας είναι γνωστή μόνο σαν εξωτερική αιτία που πρέπει να επιδράσει σε ένα υλικό σημείο για να προκαλέσει σ' αυτό επιτάχυνση.

Μια τέτοια αιτία μπορεί να θεωρηθεί ως απαρχή των περισσοτέρων αλλά και σημαντικότερων μηχανικών φαινομένων πάνω στον πλανήτη μας.

Τέτοια φαινόμενα είναι οι μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις, η παγκόσμια έλξη, η δύναμη του ανέμου, η ατμοσφαιρική πίεση ή ειδικότερα οι ελκτικές δυνάμεις που οφείλονται στον ήλιο λόγω της μεγάλης του μάζας αλλά και στη σελήνη λόγω της μικρής της απόστασης από τη γη, προκαλώντας τις γνωστές παλίρροιες της θάλασσας και της ατμόσφαιρας.

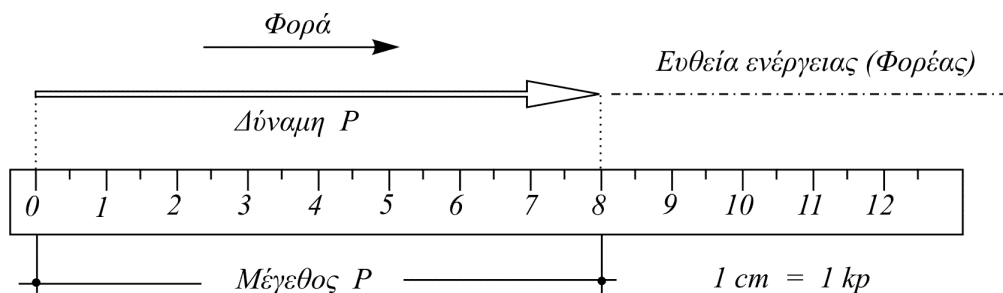
Σαν μονάδα μέτρησης των δυνάμεων έχει οριστεί στο τεχνικό σύστημα το κιλοπόν, που συμβολίζεται με kp και είναι το βάρος ενός λίτρου νερού, θερμοκρασίας 4°C , μέσου γεωγραφικού πλάτους και μηδενικού υψομέτρου.

Στην πράξη χρησιμοποιούμε επίσης και το πολλαπλάσιο της μονάδας αυτής, το μεγαπόν ή τόνο, ($1\text{Mp} = 1000 \text{ kp} = 1 \text{ t}$).

Για τον ακριβή καθορισμό μιας δύναμης θα πρέπει να γνωρίζουμε:

1. Το μέτρο της, π.χ. 8 kp
2. Την ευθεία πάνω στην οποία ενεργεί, δηλαδή το φορέα της
3. Τη φορά της
4. Το σημείο εφαρμογής της.

Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τη δύναμη γραφικά με ένα διάνυσμα, όπου:



Σχ. 1_1 Χαρακτηριστικά δύναμης

το μήκος του διανύσματος, παριστάνει, με κάποια κλίμακα, π.χ. $1 \text{ cm} = 1 \text{ kp}$ το μέτρο της δύναμης.

το βέλος του ανύσματος δείχνει τη φορά της, ενώ

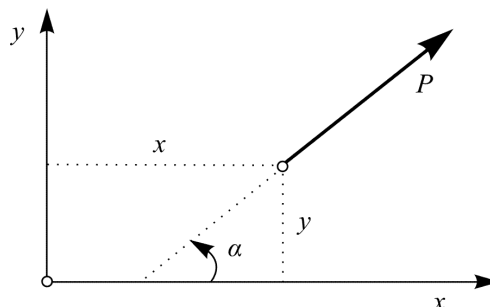
η αρχή ή το τέλος της δύναμης είναι το σημείο εφαρμογής της.

Για να καθοριστεί μια δύναμη στο επίπεδο τρία στοιχεία είναι απαραίτητα:

α) Το μέτρο της

β) Η κατεύθυνση, που ορίζεται από τη γωνία α που προκύπτει όταν ο θετικός άξονας x στραφεί αριστερόστροφα, ώσπου να συμπίψει με τη δύναμη και

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου εφαρμογής της.



Σχ. 1_2 Καθορισμός δύναμης

Στη Μηχανική των Υλικών Συστημάτων τα σώματα θεωρούνται **απόλυτα στερεά**, δηλαδή επιτρέπεται να **αγνοηθούν** οι **εσωτερικές** τους δυνάμεις. Άρα λοιπόν κάθε δύναμη που ενεργεί σε απόλυτα στερεό σώμα, επιτρέπεται να νοηθεί ότι ασκείται οπουδήποτε πάνω στο φορέα της, και ως εκ τούτου να θεωρηθεί ως **ολισθαίνον διάνυσμα**.

Στα σχήματα των επομένων κεφαλαίων δε σχεδιάζεται πάντοτε το στερεό σώμα πάνω στο οποίο δρουν οι δυνάμεις, επειδή είναι αυτονόητο ότι όπου υπάρχουν και σχεδιάζονται δυνάμεις υπάρχει πάντοτε ένα σώμα πάνω στο οποίο ενεργούν.

1.2 – Τύποι συστημάτων δυνάμεων

Για τις μελέτες και κατασκευές διαφόρων τεχνικών έργων χρησιμοποιείται από παλιά το τεχνικό σύστημα μέτρησης.

Όμως η διαστημική πρόοδος είχε σαν αποτέλεσμα την υιοθέτηση ενός ενιαίου συστήματος μέτρησης, αρχικά σ' ολόκληρο τον πλανήτη και αργότερα στο σύμπαν, του λεγόμενου φυσικού συστήματος MKS, με την ονομασία SI (System Internationale).

Το σύστημα αυτό χρησιμοποιεί σαν θεμελιώδη μεγέθη

το μέτρο (m)

το χιλιόγραμμα μάζης (kg) και

το δευτερόλεπτο (sec)

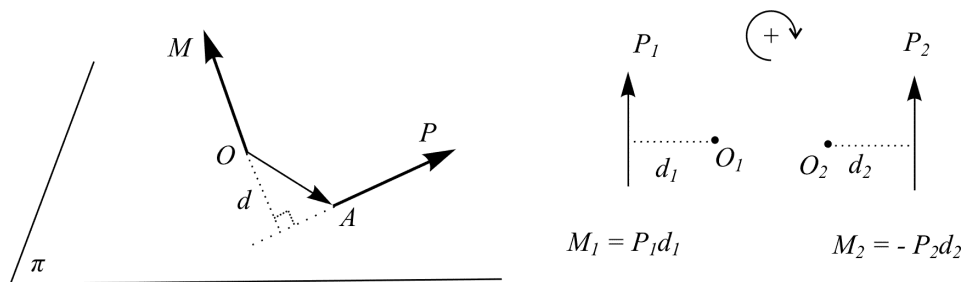
Μονάδα δύναμης στο σύστημα SI είναι το Newton (N) το οποίο δεν είναι θεμελιώδης αλλά παράγωγη μονάδα με ισοδυναμία:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2} = 0,10197 \text{ kp} \approx 0,1 \text{ kp}.$$

Σκοπός του παρόντος συγγράμματος είναι να μυήσει το σπουδαστή στον τρόπο λειτουργίας των διαφόρων ισοστατικών φορέων, των οποίων ο υπολογισμός και η κατασκευή αποτελούν αντικείμενο της επιστήμης του.

1.3 – Ροπή δύναμης ως προς σημείο και άξονα

Θεωρούμε τη δύναμη P η οποία κείται στο επίπεδο του σχήματος και σημείο O εκτός αυτής.



Σχ. 1_3 Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Θα ονομάζουμε ροπή M της δύναμης P ως προς το σημείο O το διάνυσμα που ορίζεται σα γινόμενο της δύναμης επί την επιβατική ακτίνα που ενώνει τυχόν σημείο του φορέα της (ή την αρχή A) με το O . Δηλαδή:

$$M = OA \cdot P$$

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, το διάνυσμα της ροπής είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η P και το O , έχοντας μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης P επί την απόσταση d του σημείου από το φορέα της P .

Δηλαδή είναι $M = P \cdot d$.

Η ροπή αυτή είναι θετική όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα ως προς το O (κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου) και αρνητική κατά την αντίθετη φορά.

Η απόσταση d ονομάζεται **μοχλοβραχίονας** της δύναμης.

Από τον ορισμό της, προκύπτει ότι η ροπή δύναμης ως προς σημείο:

μηδενίζεται όταν το O βρίσκεται πάνω στο φορέα της δύναμης

δεν μεταβάλλεται όταν η δύναμη ολισθήσει πάνω στο φορέα της, ή το σημείο O μετακινηθεί σ' οποιαδήποτε θέση παράλληλα προς το φορέα της δύναμης.

1.4 – Συνισταμένη και συνιστώσες

Μια δύναμη που προκαλεί σε ένα σώμα τα **ίδια μηχανικά αποτελέσματα** μ' εκείνα που προκαλούν συγχρόνως δύο ή περισσότερες δυνάμεις που δρουν στο ίδιο σώμα, ονομάζεται **συνισταμένη** των δυνάμεων αυτών.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **συνιστώσες**, τις δυνάμεις, των οποίων η δράση σε ένα σώμα έχει τα ίδια αποτελέσματα με τη συνισταμένη τους.

1.5 – Σύνθεση και ανάλυση δύναμης

Ονομάζουμε **σύνθεση** δύο ή περισσότερων δυνάμεων τον προσδιορισμό της συνισταμένης τους. Ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να γίνει με γραφικές ή αναλυτικές μεθόδους.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **ανάλυση** μιας δύναμης τον προσδιορισμό των συνιστωσών της. Η ανάλυση μιας δύναμης μπορεί να γίνει σε δύο, τρεις ή περισσότερες συνιστώσες κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αρκεί να είναι γνωστοί οι φορείς των συνιστωσών.

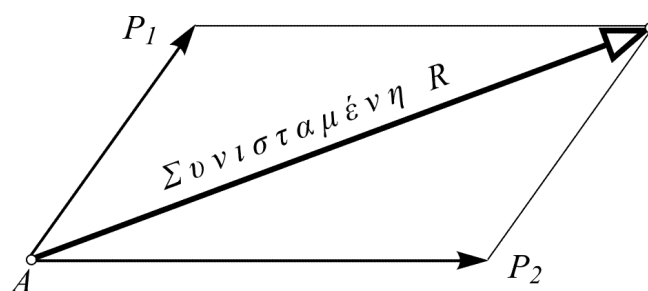
Σημειώνεται και εδώ ότι η διαδικασία που ακολουθείται συνήθως για την ανάλυση μιας δύναμης είναι γραφική, χωρίς να αποκλείεται και η χρησιμοποίηση αναλυτικών σχέσεων.

1.6 – Παραλληλόγραμμο δυνάμεων

Θεωρούμε τις δυνάμεις P_1 και P_2 του σχήματος που ενεργούν στο σημείο A .

Πρώτος ο Stevin, το 1856, διατύπωσε την άποψη ότι η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με μη παράλληλες πλευρές τις δυνάμεις P_1 και P_2 .

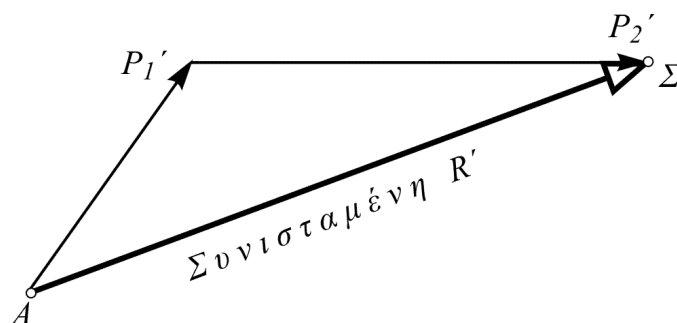
Η αρχή αυτή, που δίνεται από τη σχέση $R = P_1 + P_2$, γνωστή και σαν **αρχή του παραλληλογράμμου**, αποδεικνύεται και πειραματικά.



Σχ. 1_4 Η αρχή του παραλληλογράμμου

1.7 – Δυναμοπολύγωνο

Στο ίδιο αποτέλεσμα σύνθεσης των δυνάμεων P_1 και P_2 μπορούμε να καταλήξουμε αν από τυχόν σημείο A φέρουμε την P_1' ίση και παράλληλη της P_1 και από το τέλος της P_1' την P_2' ίση και παράλληλη της P_2 .



Ενώνοντας την αρχή της πρώτης δύναμης με το τέλος της τελευταίας, προκύπτει το διάνυσμα $A\Sigma$ που αποτελεί τη συνισταμένη R' .

Η κατασκευή αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε περισσότερες δυνάμεις. Η πολυγωνική γραμμή που προκύπτει συνολικά από τις διαδοχικές δυνάμεις με τη συνισταμένη τους, ονομάζεται **δυναμοπολύγωνο** των δυνάμεων και χρησιμοποιείται για την πρόσθεση ή αφαίρεση (χρήση αντίθετης φοράς) διανυσμάτων.

1.8 – Ζεύγος δυνάμεων

Θα λέμε ότι δύο δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων** ή απλά **ζεύγος**, όταν είναι παράλληλες, έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετες φορές.

Η απόσταση d που ορίζεται μεταξύ των παραλλήλων αυτών δυνάμεων ονομάζεται **μοχλοβραχίονας**.

Αν και η συνισταμένη ενός ζεύγους δυνάμεων είναι μηδέν, οι δυνάμεις δεν ισορροπούν, αλλά δημιουργούν ροπή όμοια μ' εκείνη που προκαλεί μια δύναμη ως προς σημείο.

Η ροπή αυτή του ζεύγους ισούται με το γινόμενο της μιας των ίσων δυνάμεων επί το μοχλοβραχίονα, και είναι:

- Θετική όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν δεξιόστροφα,
- αρνητική όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν αριστερόστροφα.

Δύο ζεύγη δυνάμεων ονομάζονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν

α) βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή σε παράλληλα επίπεδα

β) έχουν τον ίδιο προσανατολισμό (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα)

γ) έχουν την ίδια ροπή, ή όπως θα λέγαμε, τα εμβαδά των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις παράλληλες δυνάμεις του κάθε ζεύγους είναι ισοδύναμα.

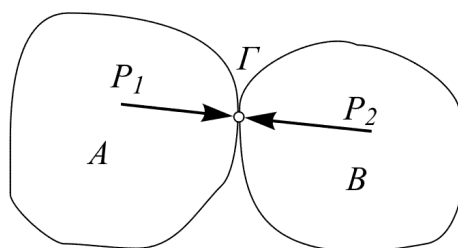
Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ελεύθερο διάνυσμα που μπορεί να εφαρμοστεί κάθετα σ' οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων του. Γι αυτό και είναι μέγεθος ανεξάρτητο της θέσης του σημείου προς το οποίο λαμβάνονται υπόψη οι ροπές άλλων ενδεχομένως δυνάμεων.

Περισσότερα ζεύγη δυνάμεων συντίθενται σε ένα συνιστάμενο ζεύγος, του οποίου η ροπή ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών τους.

Η ροπή εκφράζεται σε tm , krm , krcm , Nm κλπ.

1.9 – Δράση και αντίδραση

Θεωρούμε τα σώματα Α και Β τα οποία εφάπτονται στο σημείο Γ και ηρεμούν.



Σχ. 1_6 Διαδραστικότητα σωμάτων

Αν P_1 είναι η δύναμη την οποία ασκεί το σώμα Α πάνω στο Β, τότε τα δύο σώματα θα παραμένουν σε ισορροπία μόνον όταν και το σώμα Β ασκεί στο Α μια ίση και αντίθετη δύναμη P_2 , η οποία έχει κοινό φορέα με την P_1 .

Η δύναμη P_1 ονομάζεται δράση και η P_2 αντίδραση. Επομένως όπου υπάρχει δράση, εκεί εμφανίζεται ταυτόχρονα και μια αντίδραση.

Τονίζεται ότι η δράση και η αντίδραση δεν ανήκουν στο ίδιο σώμα. Η μια εξασκείται στο ένα σώμα και η άλλη στο άλλο.

1.10 – Φορέας, ελεύθερος και πλήρης

Η έννοια του φορέα είναι συνυφασμένη με κάθε κατασκευή που προορίζεται να αναλάβει με ασφάλεια εξωτερικές δυνάμεις και να τις μεταφέρει με την ίδια ασφάλεια στο σώμα που τη στηρίζει. Έτσι ο σκελετός μιας πολυκατοικίας π.χ. από οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το **φορέα** της.

Κάθε πλήρης φορέας αποτελείται από τον ελεύθερο φορέα και τη στήριξη.

Ελεύθερος φορέας είναι το τμήμα εκείνο της κατασκευής που δέχεται τα εξωτερικά φορτία, ενώ

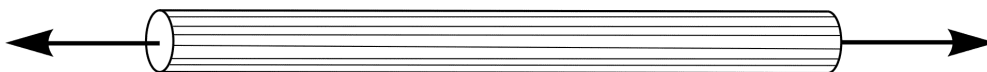
Στήριξη είναι μόνο το τμήμα εκείνο που μεταβιβάζει τις δυνάμεις από τον ελεύθερο φορέα στο έδαφος.

Έτσι, στην περίπτωση π.χ. των πολυκατοικιών, η μεταβίβαση των δυνάμεων από τον ελεύθερο φορέα στο έδαφος, γίνεται μέσω των πέδιλων θεμελίωσης των υποστυλωμάτων.

Μορφολογικά, τα κατασκευαστικά στοιχεία κάθε ελεύθερου φορέα διακρίνονται σε πέντε κατηγορίες:

α. Ράβδος

Στη ράβδο η διάσταση που κυριαρχεί είναι μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά της, ενώ οι άλλες διαστάσεις της διατομής που είναι κάθετες στον άξονα είναι **μικρές** σε σχέση με την αξονική.

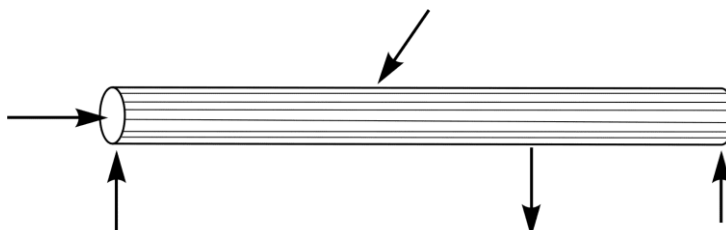


Σχ. 1_7 Τυπική ράβδος

Έτσι η ράβδος αναλαμβάνει μόνο εφελκυστικές ή θλιπτικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονά της.

β. Δοκός

Σε αντίθεση με την απλή ράβδο, η δοκός ή ράβδος σύνθετης αντοχής όπως αλλιώς λέγεται, αναλαμβάνει και δυνάμεις που είναι κάθετες στον άξονά της.

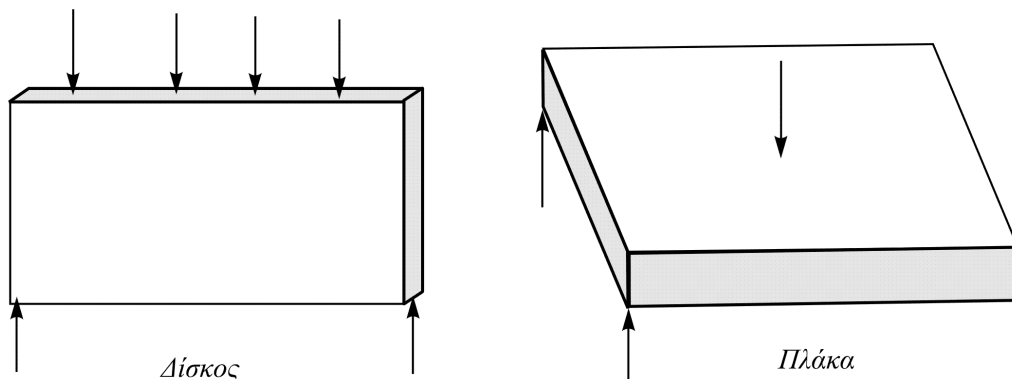


Σχ. 1_8 Φόρτιση τυπικής δοκού

Συνεπώς εντείνεται όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, στρεπτικά κλπ. δηλαδή **σύνθετα**.

γ. Δίσκος – δ. Πλάκα

Σαν κατασκευαστικά στοιχεία ελεύθερων φορέων ο δίσκος και η πλάκα είναι γεωμετρικά όμοια, επειδή έχουν μεγάλη επίπεδη επιφάνεια με μικρό σχετικά πάχος.



Σχ. 1_9 Σχηματική φόρτιση επίπεδων φορέων

Επομένως οι διαστάσεις που κυριαρχούν στους δίσκους και στις πλάκες είναι δύο αντί της μιας των ραβδωτών φορέων, γι αυτό και υπάγονται στην κατηγορία των **επιφανειακών** φορέων.

Η διαφορά μεταξύ πλακών και δίσκων βρίσκεται στον τρόπο έντασής των. Οι δίσκοι αναλαμβάνουν δυνάμεις που βρίσκονται στο μέσο επίπεδό τους, ενώ οι πλάκες αναλαμβάνουν δυνάμεις που ενεργούν κάθετα στο επίπεδό τους.

ε. Κέλυφος

Σαν κελύφη χαρακτηρίζονται οι καμπύλοι επιφανειακοί φορείς που έχουν μικρό πάχος σε σχέση με την επιφάνειά τους.

Η καμπύλωση της μέσης επιφάνειας δυσκολεύει βέβαια τον υπολογισμό, όμως συμβάλλει ουσιαστικά στην ομαλή και αβίαστη μεταβίβαση των εξωτερικών φορτίων στις στηρίξεις, χωρίς να παράγονται απαράδεκτα μεγάλες εντάσεις ή παραμορφώσεις παρά το μικρό πάχος της επιφάνειας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σημαντική **οικονομία** στο κόστος της κατασκευής.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα κελύφη με μέση επιφάνεια εκ περιστροφής που συναντάμε σε ολοένα αυξανόμενο βαθμό στις κατασκευές (κτίρια εκθέσεων, βιομηχανικά υπόστεγα, στάδια, υπόστεγα αεροπλάνων κλπ.)

1.11 – Εξωτερικές δυνάμεις

Οι εξωτερικές δυνάμεις διακρίνονται σε δυο κατηγορίες.

α. Φορτία

Είναι όλες οι δυνάμεις που ενεργούν **άμεσα** στον ελεύθερο φορέα. Τέτοιες δυνάμεις είναι όλες οι εξωτερικές δράσεις, όπως το ωφέλιμο φορτίο, η ανεμοπίεση, το ίδιο βάρος, οι σεισμικές δυνάμεις κλπ.

Τα φορτία είναι δυνατόν να είναι **συγκεντρωμένα** ή **κατανεμημένα** (ομοιόμορφα ή όχι).

Στα συγκεντρωμένα φορτία υπάγονται όλες οι δυνάμεις που γνωρίσαμε ως τώρα και οι ροπές (ζεύγη κλπ).

Κατανεμημένα ή συνεχή είναι τα φορτία που δρουν σε ορισμένο τμήμα του φορέα **συνεχώς**. Ο νόμος, σύμφωνα με τον οποίο κατανέμεται το συνεχές φορτίο εκφράζει και το είδος του. Έτσι προκύπτει π.χ.

- το **ομοιόμορφο** φορτίο, που χαρακτηρίζεται από σταθερή ένταση σε όλο το μήκος δράσης (φορτίο χιονιού)
- το **τριγωνικό** ή γραμμικά μεταβαλλόμενο, με γραμμική μεταβολή της έντασης (φορτίο υδροστατικής πίεσης) κλπ
- το **τραπεζοειδές**, που είναι επαλληλία ομοιόμορφου και τριγωνικού φορτίου
- το **παραβολικό** κλπ.

β. Αντιδράσεις

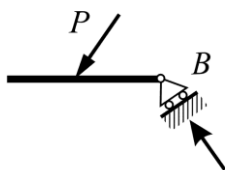
Με τον όρο αυτό χαρακτηρίζουμε τις συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές που ασκούνται στη στήριξη ή στις στηρίξεις του ελεύθερου φορέα (συνήθως από το έδαφος), και είναι ικανές να εξισορροπήσουν όλα τα φορτία.

1.12 – Στηρίξεις

Τις στηρίξεις των επιπέδων φορέων διακρίνουμε σε τρία είδη:

1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση.

Είναι η στήριξη που αποκλείει μια ελευθερία κίνησης (την κάθετη στο επίπεδο κύλισης), ενώ επιτρέπει τις άλλες δύο, που είναι η μετακίνηση στο επίπεδο κύλισης και η στροφή.



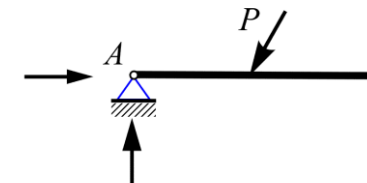
Σχ. 1_10 Τυπική κύλιση

Άρα αναπτύσσεται μόνο μια αντίδραση που είναι κάθετη στο επίπεδο κύλισης.

2. Άρθρωση

Είναι η στήριξη που αποκλείει δύο ελευθερίες κίνησης (την οριζόντια και την κατακόρυφη), ενώ επιτρέπει μόνο την περιστροφή γύρω από την άρθρωση.

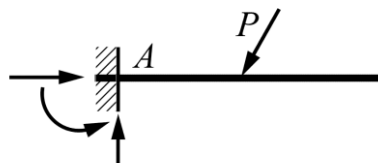
Άρα αναπτύσσεται μόνο οριζόντια και κατακόρυφη αντίδραση.



Σχ. 1_11 Τυπική άρθρωση

3. Πάκτωση

Το είδος αυτό της στήριξης, δεν επιτρέπει καμιά κίνηση. Εφ' όσον λοιπόν αποκλείει κάθε ελευθερία κίνησης, έπεται ότι θα αναπτύσσονται σαν αντιδράσεις μια οριζόντια και μια κατακόρυφη δύναμη, καθώς και μια ροπή.



Σχ. 1_12 Τυπική πάκτωση

Γενικά παρατηρούμε ότι κάθε συνιστώσα αντίδρασης προκύπτει από την κατάργηση της ελευθερίας στην αντίστοιχη διεύθυνση.

1.13 – Ισοστατικοί και υπερστατικοί φορείς

Διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες φορέων. Τους **ισοστατικούς** και τους **υπερστατικούς**.

Τα κριτήρια κατάταξης ενός φορέα σε κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές δεν είναι δυνατόν να καθοριστούν με τις μέχρι τώρα λιγοστές έννοιες.

Χονδρικά ωστόσο θα μπορούσαμε να πούμε, ότι με τυχούσα επίπεδη φόρτιση, ένας ισοστατικός φορέας παρουσιάζει συνολικά 3 άγνωστες αντιδράσεις, ενώ ένας υπερστατικός παρουσιάζει περισσότερες των τριών.

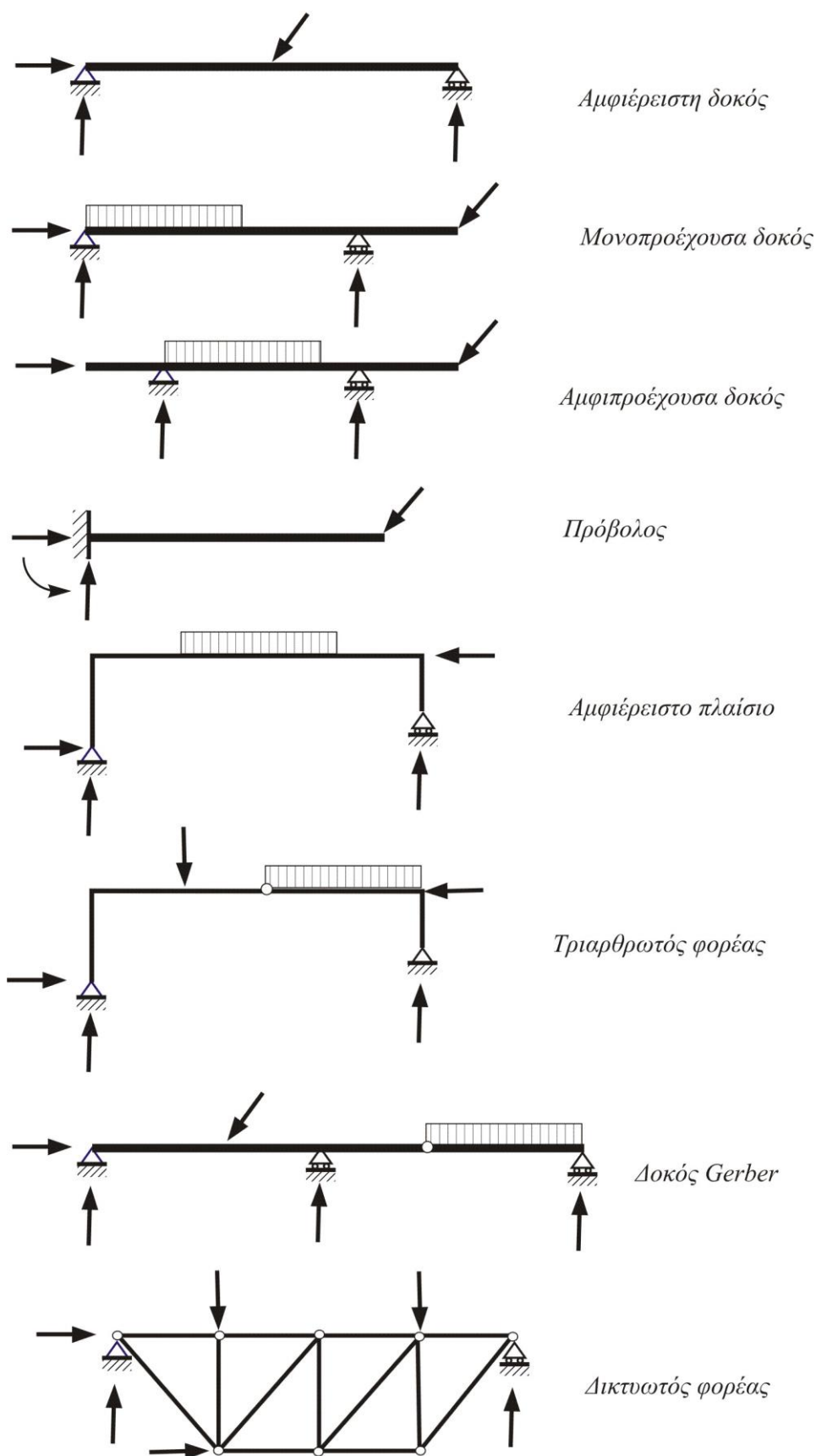
Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τους ισοστατικούς φορείς.

Οι υπερστατικοί φορείς, που κατά κανόνα συναντάμε στην πράξη, αποτελούν αντικείμενο της προχωρημένης στατικής. Άλλωστε η επίλυσή τους προϋποθέτει τη γνώση των μεθόδων επίλυσης των ισοστατικών ή στατικά ορισμένων φορέων.

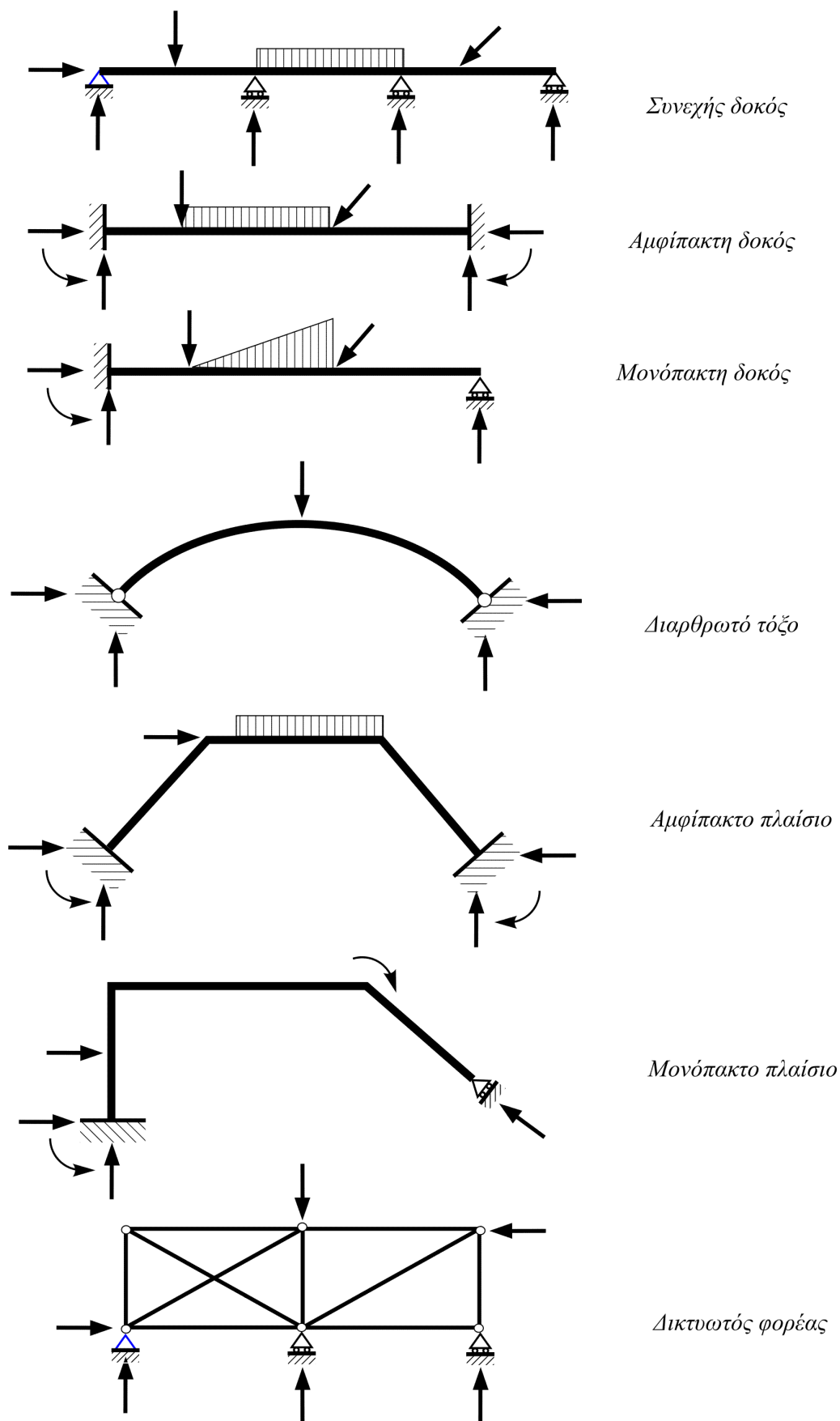
Στα χαρακτηριστικά παραδείγματα ισοστατικών φορέων που παρουσιάζονται στην επόμενη σελίδα, παρατηρούμε ότι το τριαρθρωτό τόξο και η δοκός Gerber, παρουσιάζουν περισσότερες από 3 αντιδράσεις.

Ωστόσο κατατάσσονται στην κατηγορία των ισοστατικών φορέων, επειδή, όπως θα φανεί αργότερα σε αντίστοιχο κεφάλαιο που περιγράφει τους φορείς αυτούς, είναι δυνατή, λόγω της άρθρωσης που μεσολαβεί, η εξεύρεση των υπολοίπων απαιτούμενων εξισώσεων, για τον προσδιορισμό όλων των αντιδράσεων.

Χαρακτηριστικοί ισοστατικοί φορείς



Σχ. 1_13



Σχ. 1_14 Χαρακτηριστικοί υπερστατικοί φορείς

Κεφάλαιο 2

Δυνάμεις στο επίπεδο - Γραφοστατική

Η Γραφοστατική είναι το τμήμα εκείνο της Στατικής που έχει σαν αντικείμενο τη μελέτη των συνθηκών ισορροπίας των σωμάτων με γραφικές μόνο μεθόδους.

Αναχωρεί από τη διαπίστωση ότι σε κάθε σώμα που ισορροπεί δρουν δυνάμεις, η κάθε μια από τις οποίες αν ενεργούσε μόνη της, θα το έθετε σε κίνηση. Και ασχολείται, όπως άλλωστε και η στατική γενικότερα, με το ερώτημα πότε, των δυνάμεων αυτών αλληλοαναιρουμένων, διατηρεί το σώμα την κατάσταση της ηρεμίας.

2.1 – Σύνθεση συνεπιπέδων συντρεχουσών δυνάμεων

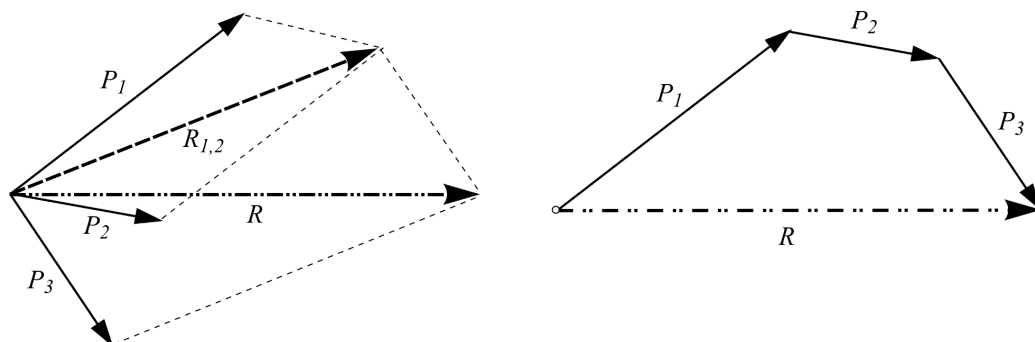
Θεωρούμε απόλυτα στερεό σώμα, σε σημείο A του οποίου ασκούνται οι συντρεχουσες δυνάμεις P_1 , P_2 και P_3 .

Αν R είναι η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών, είναι φανερό ότι ο φορέας της θα περνάει από το σημείο A , αφού οι δυνάμεις είναι συντρεχουσες.

Η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο της μπορούν να προσδιοριστούν γραφικά κατασκευάζοντας διαδοχικά το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων P_1 , P_2 και, συνθέτοντας στη συνέχεια τη συνισταμένη $R_{1,2}$ (διαγώνιο του παραλληλογράμμου), με τη δύναμη P_3 , προκύπτει τελικά η συνισταμένη R των δυνάμεων.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε κατασκευάζοντας το αντίστοιχο **δυναμοπολύγωνο**, ξεκινώντας δηλαδή από τυχόν σημείο του επιπέδου, να φέρουμε το διάνυσμα P_1 , ίσο και παράλληλο προς την P_1 , στη συνέχεια από το άκρο του P_1 διάνυσμα P_2 ίσο και παράλληλο της P_2 εξαντλώντας κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις δυνάμεις, ανεξάρτητα από τη σειρά τους.

Τότε η συνισταμένη R θα είναι το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του πρώτου διανύσματος με το τέλος του τελευταίου.



Σχ. 2_1 Κατασκευή δυναμοπολυγώνου

Το δυναμοπολύγωνο και γενικά το διάγραμμα που προκύπτει από τη σχεδίαση των δυνάμεων υπό κλίμακα (δεξιό σχήμα) ονομάζεται **διάγραμμα δυνάμεων**.

2.2 – Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις

Θεωρούμε επίπεδο σύστημα δυνάμεων P_1, P_2, P_3 οι οποίες δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο και ενεργούν σε απόλυτα στερεό σώμα.

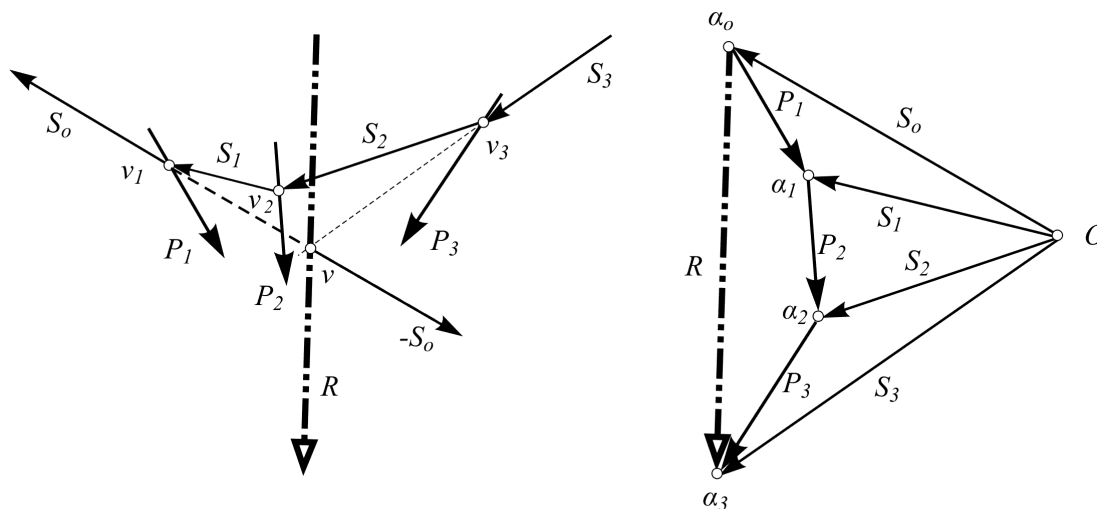
Το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης R των δυνάμεων μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με την κατασκευή ενός δυναμοπολυγώνου όπως προηγουμένως. Παίρνοντας δηλαδή με κάποια κλίμακα δυνάμεων, (π.χ. $1 \text{ cm} \equiv \lambda \text{ ton}$), διάνυσμα $\alpha_0\alpha_1 = P_1$, $\alpha_1\alpha_2 = P_2$ κλπ.

Έτσι προκύπτει το διάνυσμα $\alpha_0\alpha_3$ το οποίο εκφράζει τη συνισταμένη των δυνάμεων

$$R = P_1 + P_2 + P_3$$

κατά διεύθυνση, φορά και ένταση.

Απομένει να προσδιοριστεί ο φορέας της R στο **διάγραμμα θέσης** (αριστερό σχήμα).



Σχ. 2_2 Κατασκευή σχοινοπολυγώνου

Παρατηρούμε ότι αν στο σύστημα των δεδομένων δυνάμεων προσθέσουμε τις αλληλοαναιρούμενες δυνάμεις S_0 και $-S_0$ που ενεργούν σε τυχαίο άξονα, και συνθέσουμε την S_0 και την P_1 ώστε να προκύψει η συνισταμένη S_1 , όπως φαίνεται στο διάγραμμα δυνάμεων του δεξιού τμήματος

$$S_0 + P_1 = S_1,$$

στη συνέχεια την S_1 με την P_2 για να προκύψει η συνισταμένη S_2 ,

$$S_1 + P_2 = S_0 + P_1 + P_2 = S_2,$$

όμοια την S_2 με την P_3 στη συνισταμένη S_3 κοκ.

$$S_2 + P_3 = S_0 + P_1 + P_2 + P_3 = S_3,$$

προκύπτει τελικά αντικατάσταση του συστήματος των αρχικών δυνάμεων με τις αλληλοαναιρούμενες, σε δύο μόνον απομένουσες δυνάμεις: την S_3 με την $-S_0$.

Άρα η τομή της S_3 με την $-S_0$ θα μου δώσει το σημείο ν , το οποίο είναι φανερό ότι ανήκει στον άξονα ενέργειας (φορέα) της συνισταμένης R .

Πρακτικά μετά την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου, εκλέγεται ένα τυχαίο σημείο O που ονομάζεται **πόλος** του δυναμοπολυγώνου. Η εκλογή του πόλου γίνεται έτσι, ώστε να μη βρίσκεται σε κανέναν από τους φορείς των δυνάμεων, οι δε **πολικές ακτίνες** (δυνάμεις), που φέρονται από το O προς τα σημεία a_0, a_1, \dots να είναι κατά το δυνατόν πιο διακεκριμένες.

Στη συνέχεια, μεταβαίνοντας στο διάγραμμα θέσης, από τυχόν σημείο φέρνουμε το διάνυσμα S_0 παράλληλο του διανύσματος Oa_0 , το οποίο τέμνει την P_1 , που εμφανίζεται πρώτη στο διάγραμμα δυνάμεων, στο σημείο ν_1 .

Από το ν_1 φέρνουμε το διάνυσμα S_1 παράλληλο του διανύσματος Oa_1 , το οποίο τέμνει την P_2 , δεύτερη στο διάγραμμα δυνάμεων, στο σημείο ν_2 .

Από το ν_2 φέρνουμε το διάνυσμα S_2 παράλληλο του διανύσματος Oa_2 , το οποίο τέμνει την P_3 στο σημείο ν_3 .

Τελικά από το ν_3 φέρνουμε το διάνυσμα S_3 παράλληλο του διανύσματος Oa_3 , το οποίο τέμνει την S_0 στο σημείο ν .

Η πολυγωνική γραμμή των δυνάμεων $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$ στο διάγραμμα θέσης ονομάζεται **σχοινοπολύγωνο**, ενώ η κάθε δύναμη χωριστά ορίζει τη λεγόμενη **πλευρά** του σχοινοπολυγώνου.

Κάθε πλευρά του σχοινοπολυγώνου που αντιστοιχεί στις παραπάνω δυνάμεις S_1, S_2, S_3, \dots είναι φορέας:

- της αυθαίρετης πλευράς S_0 , που πήραμε αρχικά, και

- της συνισταμένης των δυνάμεων P_1, P_2, P_3, \dots αντίστοιχα που προηγήθηκαν κατά τη σύνθεση.

Παρατήρηση

Λόγω της παραλληλίας που υπάρχει ανάμεσα στις πλευρές του σχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης με τις αντίστοιχες πολικές ακτίνες στο διάγραμμα δυνάμεων, για τον καθορισμό της **αντιστοιχίας** των δυνάμεων στα δύο διαγράμματα, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη ότι:

Κάθε δύναμη που **περιλαμβάνεται** μεταξύ δύο πολικών ακτίνων στο διάγραμμα δυνάμεων, έχει σαν αντίστοιχη τη δύναμη που **περνάει** από το σημείο τομής των αντίστοιχων πλευρών του σχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης. Αντίστροφα:

Κάθε πολική ακτίνα που **περνάει** από το σημείο τομής δύο διαδοχικών δυνάμεων στο διάγραμμα δυνάμεων, έχει σαν αντίστοιχη πλευρά του σχοινοπολυγώνου τη δύναμη που **περιλαμβάνεται** μεταξύ των αντίστοιχων διαδοχικών δυνάμεων στο διάγραμμα θέσης. Ή ακόμη:

Κάθε πλευρά του σχοινοπολυγώνου που **περιλαμβάνεται** μεταξύ δύο δυνάμεων στο διάγραμμα θέσης, έχει, σαν αντίστοιχη πολική ακτίνα στο διάγραμμα δυνάμεων, τη δύναμη που **περνάει** από το σημείο τομής των αντίστοιχων δυνάμεων.

Τα παραπάνω εκφράζουν ρητά την αρχή του δασμού μεταξύ των δύο διαγραμμάτων, η οποία μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Κάθε δύναμη που στο ένα διάγραμμα **περιέχεται** μεταξύ δύο δυνάμεων, έχει, στο άλλο διάγραμμα, σαν αντίστοιχη τη δύναμη που **περνάει** από το σημείο τομής των αντιστοιχών δυνάμεων και αντίστροφα. Ακόμη:

Κάθε **τρίγωνο** δυνάμεων του ενός διαγράμματος έχει, στο άλλο διάγραμμα, σαν αντίστοιχό του, το **σημείο τομής** των αντιστοιχών δυνάμεων.

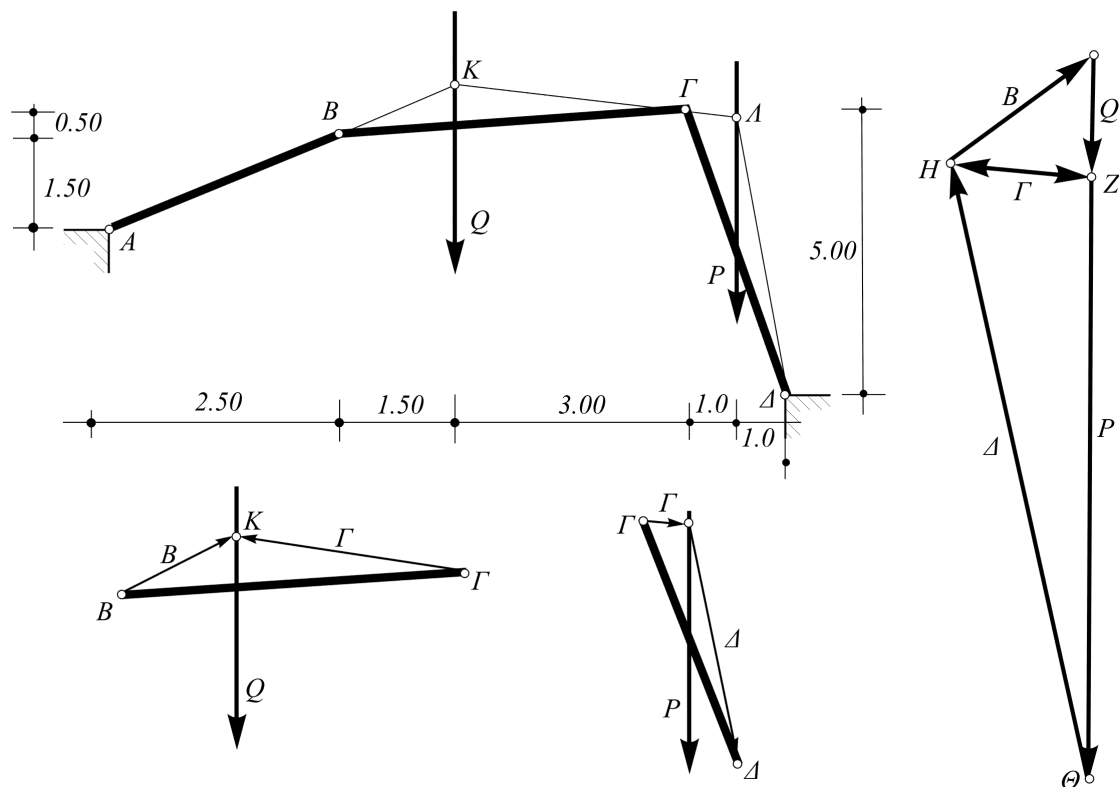
2.3 – Παραδείγματα

1 Να υπολογιστεί η δύναμη P καθώς και οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στα άκρα των ράβδων που συνδέονται αρθρωτά όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι η δύναμη Q είναι 400 N. Η λύση να δοθεί γραφικά.

Λύση

Επειδή στη ράβδο AB δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη, έπεται ότι οι αντιδράσεις στα άκρα της A και B έχουν τη διεύθυνση της AB .

Έτσι η τομή της AB και του φορέα της Q ορίζει το σημείο K , από όπου οφείλει να περάσει η δύναμη που διαβιβάζεται μέσω του κόμβου Γ , μιας και η ράβδος $B\Gamma$ ισορροπεί.



Σχ. 2_3 Γραφική επίλυση ισορροπίας δυνάμεων

Γνωρίζοντας τώρα τη διεύθυνση της δύναμης που διαβιβάζεται από το Γ , βρίσκουμε το σημείο τομής Λ αυτής με το γνωστό φορέα της P , από όπου οφείλει να περάσει η αντίδραση στο Δ .

Ύστερα από αυτά, κατασκευάζουμε τα δυναμοτρίγωνα που εκφράζουν την ισορροπία των ράβδων $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$, που είναι αντίστοιχα τα EZH και $HZ\Theta$.

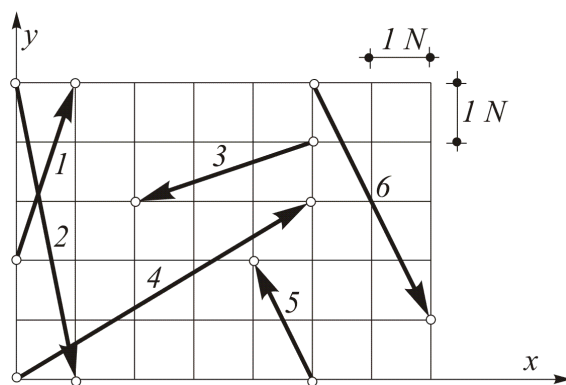
Έτσι, ορίζονται γραφικά οι αντιδράσεις B , Γ , Δ , η P και η $A = B$. Από την κλίμακα του διαγράμματος δυνάμεων που επελέγη, προκύπτει:

$$A = B = 640 \text{ N}, \quad \Gamma = 540 \text{ N}, \quad \Delta = 2.660 \text{ N} \quad \text{και} \quad P = 2.500 \text{ N}.$$

- 2** Να προσδιοριστεί γραφικά η συνισταμένη των δυνάμεων που εικονίζονται στο σχήμα 2_4 κατά τη σειρά 1, 2, 3, 4, 5 και 6 με τη μέθοδο του σχοινοπολυγώνου.

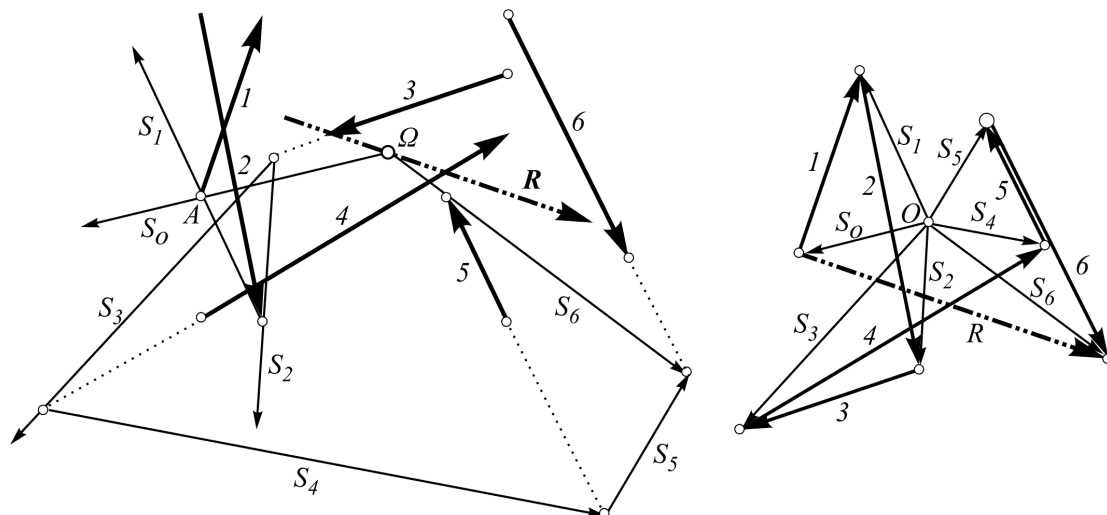
Λύση

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων, από όπου προκύπτει το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της R .



Σχ. 2_4

Τη θέση του φορέα της στο διάγραμμα θέσης προσδιορίζουμε με τη μέθοδο του σχοινοπολυγώνου, παίρνοντας τυχόν σημείο A της δύναμης 1, από όπου, φέρνοντας κατά το γνωστό τρόπο παράλληλες προς τις αντίστοιχες πολικές ακτίνες, καταλήγουμε διαδοχικά στο σημείο Ω , που είναι η τομή της πρώτης και της τελευταίας πλευράς του σχοινοπολυγώνου.



Σχ. 2_5 Γραφικός προσδιορισμός συνισταμένης ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων

Είναι φανερό ότι ο φορέας της συνισταμένης R περνάει από το Ω .

Από την κλίμακα του διαγράμματος δυνάμεων προκύπτει ότι $R = 7,3 \text{ N}$.

2.4 – Προσδιορισμός αντιδράσεων

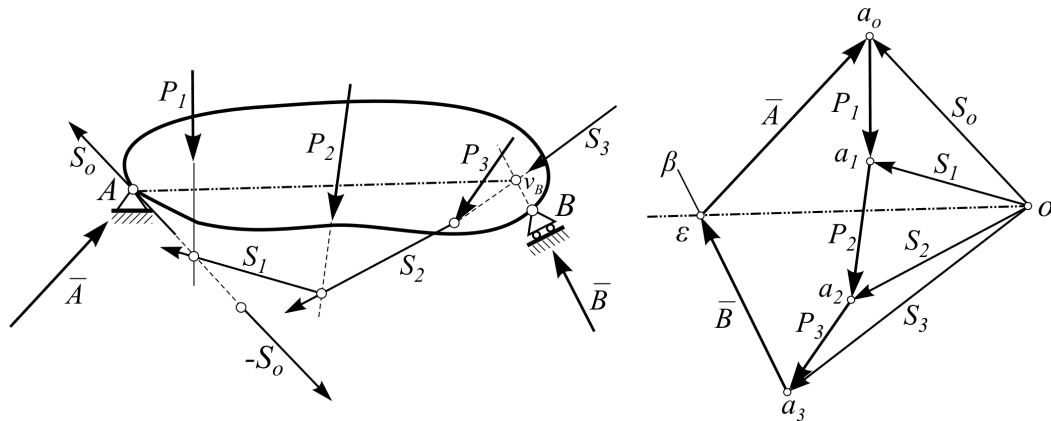
Θεωρούμε τον αμφιέρειστο φορέα που εικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί και στηρίζεται στο σημείο A με άρθρωση, ενώ στο σημείο B με κύλιση γνωστής διεύθυνσης. Τούτο σημαίνει ότι η αντίδραση B έχει σα φορέα την ευθεία που περνάει από το B κάθετα στο επίπεδο κύλισης και συνεπώς άγνωστο παραμένει το μέτρο και η φορά της.

Για την αντίδραση A , το μόνο γνωστό είναι ότι περνάει από τη στήριξη A . Άγνωστα παραμένουν το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της.

Για το **γραφικό προσδιορισμό των αντιδράσεων A και B** εργαζόμαστε ως εξής:

Από τις εξωτερικές δυνάμεις P_1, P_2, P_3 που δρουν στο φορέα, σχηματίζουμε με κάποια κλίμακα, το δυναμοπολύγωνο, και από το τέλος της τελευταίας δύναμης (σημείο a_3) φέρνουμε την $a_3\beta$, παράλληλη προς τη γνωστή διεύθυνση της αντίδρασης B.

Στη συνέχεια εκλέγουμε ένα τυχόν σημείο O σαν πόλο και φέρνουμε τις πολικές ακτίνες.



Σχ. 2_6 Γραφικός προσδιορισμός αντιδράσεων με σχοινοπολύγωνο

Για την κατασκευή του σχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης, φέρνουμε την πρώτη του πλευρά S_0 έτσι, ώστε να περνάει από την άρθρωση A, ενώ η υπόλοιπη εργασία συνεχίζεται κατά το γνωστό τρόπο.

Μετά την κατασκευή του σχοινοπολυγώνου, το σύστημα των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 αντικαταστάθηκε από τις $-S_0$ και S_3 . Επειδή όμως στο φορέα, εκτός από την εξωτερική φόρτιση (P_1, P_2, P_3) ενεργούν και οι αντιδράσεις του, (A, B), το σύστημα των δυνάμεων ισορροπεί μόνον όταν η συνισταμένη του μηδενιστεί.

Είναι φανερό ότι οι δυνάμεις B και S_3 , που τέμνονται στο σημείο ν_B , δίνουν συνισταμένη που περνάει απ' αυτό. Κατά τον ίδιο τρόπο οι δυνάμεις A και $-S_0$ δίνουν συνισταμένη που περνάει από το A.

Επειδή όμως το σύστημα των δυνάμεων ισορροπεί, θα πρέπει οι δύο αυτές συνισταμένες να είναι ίσες και αντίθετες και να έχουν κοινό φορέα.

Ο φορέας αυτός είναι η ευθεία $A\nu_B$, η οποία ονομάζεται **κλείουσα** του σχοινοπολυγώνου.

Φέρνοντας τώρα στο διάγραμμα δυνάμεων την $O\varepsilon$ παράλληλη προς την κλείουσα που έχουμε ήδη προσδιορίσει, ορίζουμε πάνω στην $a_3\beta$ το σημείο ε και στη συνέχεια τις ζητούμενες αντιδράσεις

$$a_3\varepsilon = \bar{B} \quad \text{και} \quad \varepsilon a_0 = \bar{A}.$$

Σημείωση

Η παρατήρηση που έγινε στο τέλος της ανάπτυξης της θεωρίας του σχοινοπολυγώνου και αναφέρεται, στην αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των πλευρών του σχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης με τις πολικές ακτίνες στο διάγραμμα δυνάμεων, εδώ έχει ιδιαίτερη σημασία και μπορεί να αποβεί σημαντικά χρήσιμη για την αποφυγή λαθών.

Μια διαφορετική διατύπωση από αυτή που ήδη γνωρίσαμε είναι:

Κάθε **σημείο** που προκύπτει σαν τομή δύο δυνάμεων και μιας πολικής ακτίνας στο διάγραμμα δυνάμεων, αντιστοιχεί σε **τρίγωνο** με πλευρές τις αντίστοιχες προς αυτές δυνάμεις στο διάγραμμα θέσης.

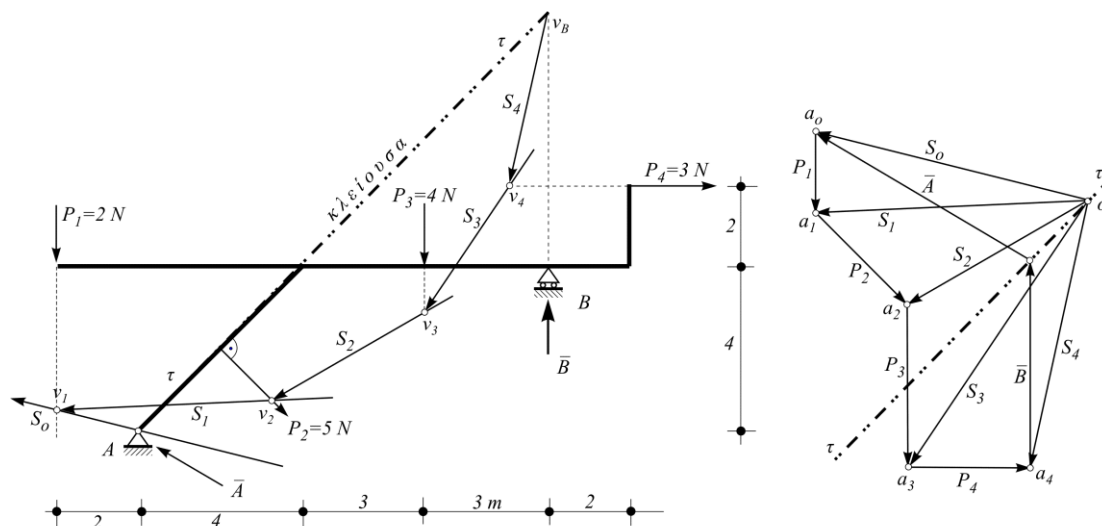
Και αντίστροφα κάθε σημείο τομής δύο πλευρών του σχοινοπολυγώνου και μιας δύναμης στο διάγραμμα θέσης, αντιστοιχεί σε τρίγωνο, με πλευρές τις αντίστοιχες προς αυτές πολικές ακτίνες του διαγράμματος δυνάμεων.

2.4.1 – Παράδειγμα

Να προσδιοριστούν γραφικά οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης A και B, του φορέα που εικονίζεται παρακάτω.

Λύση

Με κατάλληλα επιλεγμένη κλίμακα, πχ. $1 \text{ cm} \cong 2 \text{ N}$ κατασκευάζω το δυναμοπολύγωνο των εξωτερικών δυνάμεων και, παίρνοντας τυχόντα πόλο O, φέρνω τις πολικές ακτίνες S_0, \dots, S_4 .



Σχ. 2_7 Γραφικός προσδιορισμός αντιδράσεων με σχοινοπολύγωνο

Από την άρθρωση A του φορέα φέρνω την S_0 παράλληλη προς την αντίστοιχη πολική ακτίνα, που τέμνει την πρώτη δύναμη που εμφανίζεται στο δυναμοπολύγωνο, P_1 , στο σημείο v_1 .

Απ' εκεί καταλήγουμε κατά τα γνωστά στην τελευταία πλευρά του σχοινοπολυγώνου, την S_4 , που τέμνει τη γνωστή κατά διεύθυνση αντίδραση στην κύλιση, στο σημείο v_B .

Η ευθεία $Av_B = \tau\tau$, είναι η κλείουσα.

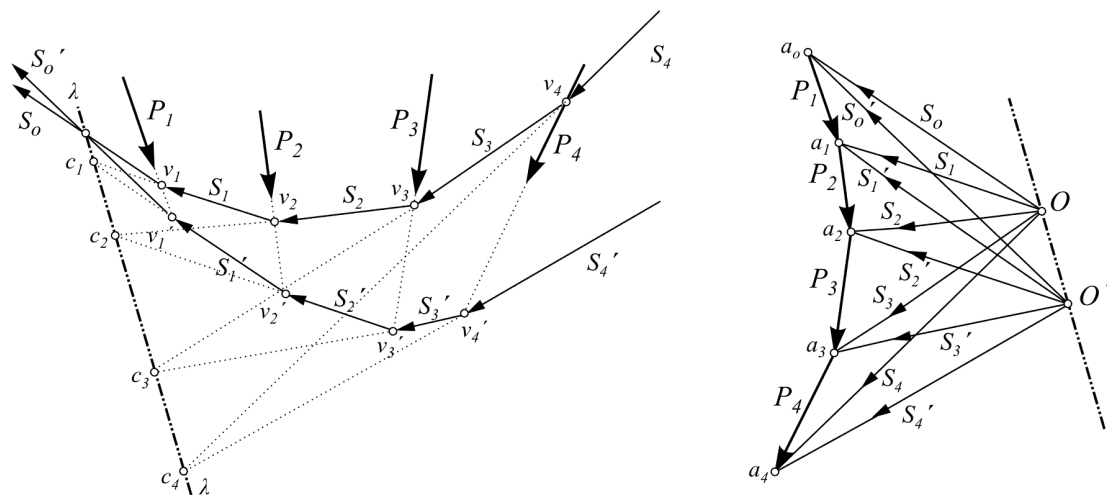
Από τον πόλο O φέρνω παράλληλη προς την κλείουσα, που τέμνει την από το a_4 παράλληλη της αντίδρασης B στο σημείο β .

Έτσι ορίζονται γραφικά οι αντιδράσεις

$$a_4\beta = \bar{B} = 5,70 \text{ N} \quad \text{και} \quad \beta a_0 = \bar{A} = 7,60 \text{ N}.$$

2.5 – Σχοινοπολύγωνα της ίδιας ομάδας

Για ένα συγκεκριμένο σύστημα δυνάμεων, είναι δυνατόν να χαραχθούν **άπειρα** σχοινοπολύγωνα, αν κάθε φορά, για την κατασκευή του διαγράμματος δυνάμεων, επιλέγουμε **διαφορετικό** πόλο, ή διαφορετικό σημείο v_1 (τομή της πρώτης πλευράς του σχοινοπολυγώνου με την πρώτη δύναμη στο διάγραμμα θέσης).



Σχ. 2_8 Σχοινοπολύγωνα ίδιας ομάδας - Ευθεία Culmann

Με πόλους O και O' , στο σύστημα των τεσσάρων δυνάμεων του σχήματος, χαράχθηκαν τα σχοινοπολύγωνα $S_0S_1S_2S_3S_4$ και $S_0'S_1'S_2'S_3'S_4'$.

Από τα όσα μέχρι στιγμής έχουν αναπτυχθεί, είναι φανερό ότι τα σημεία τομής (S_0, S_4) και (S_0', S_4') των ακραίων πλευρών σε καθένα από τα δύο σχοινοπολύγωνα, κείνται στην ευθεία του φορέα της συνισταμένης της δοσμένης ομάδας δυνάμεων. Αλλά και τα σημεία τομής (S_0, S_1) , (S_0', S_1') των πρώτων πλευρών των σχοινοπολυγώνων με ενδιάμεσες πλευρές τους, κείνται αντίστοιχα στο φορέα της συνισταμένης των δυνάμεων $(S_0, \dots P_i)$, $(S_0', \dots P_i)$.

Τούτο σημαίνει ότι οι δυνάμεις $P_1 \dots P_i$ ισοδυναμούν προς τις διαφορές $S_i - S_0$ ή $S_i' - S_0'$.

Επομένως προκύπτει η σχέση:

$$S_i - S_o = S'_i - S'_o \quad \text{ή}$$

$$S_o - S'_o = S_i - S'_i \quad \text{δηλαδή}$$

$$S_o - S'_o = S_1 - S'_1 = S_2 - S'_2 = S_3 - S'_3 = \dots = OO'.$$

Τούτο σημαίνει ότι οι αντίστοιχες πλευρές δύο σχοινοπολυγώνων που αντιστοιχούν στην ίδια ομάδα δυνάμεων, τέμνονται σε σημεία $c_o, c_1, c_2, c_3, \dots$ που κείνται σε ευθεία ll παράλληλη προς την OO' .

Η ευθεία αυτή ονομάζεται **ευθεία Culmann**.

Η παρατήρηση αυτή δίνει τη δυνατότητα μετασχηματισμού ενός σχοινοπολυγώνου σε άλλο, που να έχει ορισμένες ιδιότητες, π.χ:

- α) Μία πλευρά του να περνάει από ένα δοσμένο σημείο (∞^2 λύσεις)
- β) Δύο πλευρές του να περνούν αντίστοιχα από δύο δοσμένα σημεία (∞^1 λύσεις) και
- γ) Τρεις πλευρές του να περνούν αντίστοιχα από τρία δοσμένα σημεία (μία λύση).

2.6 – Σχοινοπολύγωνο δια τριών σημείων

α) Είναι πολύ εύκολο να χαραχθεί κατ' ευθείαν σχοινοπολύγωνο, με τον περιορισμό μια πλευρά του, π.χ. η S_i να περνάει από δοσμένο σημείο A . Η διαδικασία είναι απλή. Χαρακτηρίζουμε στο διάγραμμα θέσης τυχούσα ευθεία που περνάει από το A σαν S_i και κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων με κορυφές a_o, a_1, \dots, a_n .

Τότε ο πόλος O θα βρίσκεται σε τυχούσα θέση πάνω στην ευθεία που περνάει από το a_i και είναι παράλληλη της S_i .

Επειδή για κάθε μια από τις άπειρες θέσεις της S_i γύρω από το A , ορίζεται σαν πόλος ένα από τα άπειρα σημεία της a_iO , το πρόβλημα έχει ∞^2 λύσεις.

Μετά την ολοκλήρωση κατασκευής του διαγράμματος δυνάμεων με τις υπόλοιπες πολικές ακτίνες, μεταβαίνουμε στο διάγραμμα θέσης, όπου η συμπλήρωση του σχοινοπολυγώνου εκατέρωθεν των σημείων v_i, v_{i+1} (τομών της S_i με τους φορείς των δυνάμεων P_i, P_{i+1}), είναι πλέον απλή.

β) Ενδέχεται όμως να ζητηθεί και κάποια άλλη πλευρά του σχοινοπολυγώνου, με δείκτη k , να περνάει από άλλο, προκαθορισμένο σημείο B . Στην περίπτωση αυτή, σχηματίζουμε αρχικά το σχοινοπολύγωνο $S_o \dots S_n$ όπως προηγουμένως, εκλέγοντας τυχούσα δια του A ευθεία σαν πλευρά S_i του σχοινοπολυγώνου. Στη συνέχεια, θεωρώντας την S_i σαν ευθεία Culmann,

μετασχηματίζουμε το σχοινοπολύγωνο $S_0 \dots S_n$ σε άλλο $S_0' \dots S_n'$ του οποίου όμως η πλευρά S_k' περνάει από το Β.

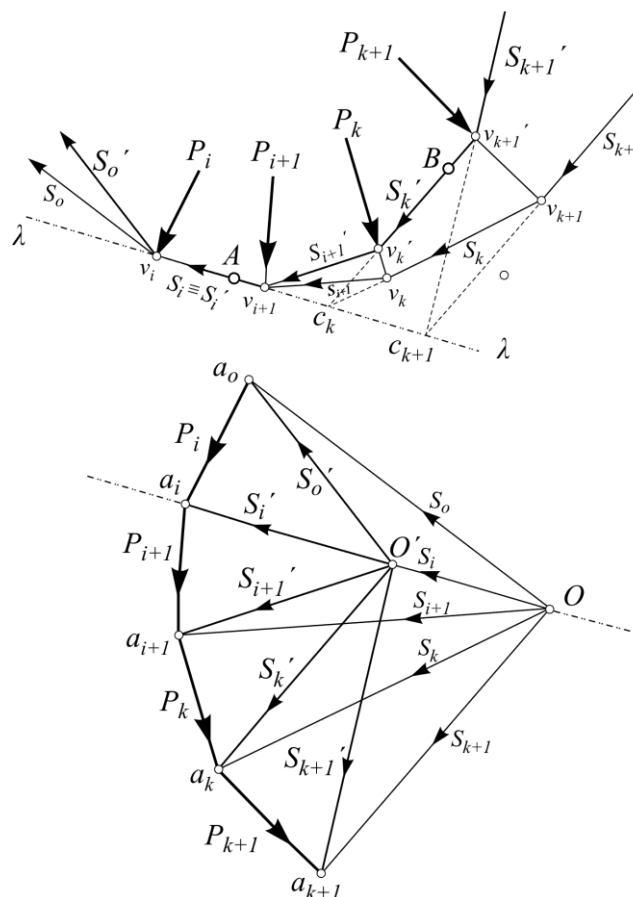
Για το μετασχηματισμό αυτό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Βρίσκουμε τα σημεία τομής των $n-2$ πλευρών του σχοινοπολυγώνου $S_0 \dots S_n$ με την S_i . Από τις $n+1$ πλευρές του σχοινοπολυγώνου εξαιρούνται S_i , που θεωρείται ήδη ως ευθεία Culmann, και οι εκατέρωθεν πλευρές S_{i-1} , S_{i+1} που τέμνονται ήδη με την S_i στα σημεία v_i και v_{i+1} , δηλαδή συνολικά

$$n + 1 - 3 = n - 2 \text{ πλευρές.}$$

- Αν C_k είναι το σημείο τομής της S_k και της S_i (Culmann), φέρνοντας την $C_k B$, σχηματίζω ήδη την πρώτη πλευρά S_k' του μετασχηματισμένου σχοινοπολυγώνου, που τέμνει τις δυνάμεις P_k και P_{k+1} στα σημεία v_k' και v_{k+1}' αντίστοιχα.

Από το σημείο a_k του διαγράμματος δυνάμεων φέρνω την $a_k O'$ παράλληλη της S_k' , που τέμνει την $a_i O$ (παράλληλη της Culmann) στο σημείο O' , ορίζοντας έτσι το νέο πόλο.



Σχ. 2_9 Μετασχηματισμός σχοινοπολυγώνου

Μετά την εκλογή της S_i , για **κάθε** θέση του αρχικού πόλου O προκύπτει **ένα** συγκεκριμένο σχοινοπολύγωνο $S_0 \dots S_n$, που οδηγεί με τη

σειρά του (μέσω της ευθείας Culmann) σε έναν άλλο πόλο O' , δηλαδή σε ένα μετασχηματισμένο σχοινοπολύγωνο. Συνεπώς το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις, που ανταποκρίνονται στις άπειρες θέσεις της ευθείας S_i δια του A .

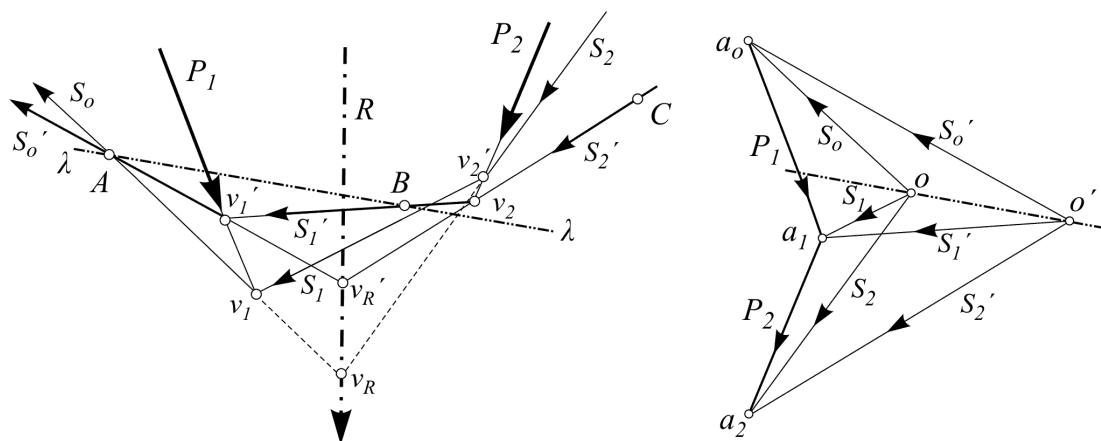
Μετά τον ορισμό του νέου πόλου O' στο διάγραμμα δυνάμεων, φέρνουμε τις νέες πολικές ακτίνες, στις οποίες αντιστοιχούμε τις νέες πλευρές του σχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης (πλην της S_i).

Υ) Τέλος είναι δυνατόν να ζητηθεί και μία τρίτη ακόμη πλευρά, πχ. με δείκτη l , να περνάει από προκαθορισμένο σημείο C .

Ενός τέτοιου σχοινοπολυγώνου, η θέση καθορίζεται μονοσήμαντα, δηλαδή η λύση είναι μοναδική.

Για τη χάραξή του θα χρειαστεί ένας ακόμη μετασχηματισμός, και μάλιστα τέτοιος, ώστε οι πλευρές του σχοινοπολυγώνου με δείκτες i και k , να μην παύσουν φυσικά να περνούν από τα σημεία A και B .

Έτσι, σαν ευθεία Culmann πρέπει τώρα να εκλεγεί η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά, για να ξεκινήσει στη συνέχεια η διαδικασία της προηγούμενης περίπτωσης.



Σχ. 2_10 Σχοινοπολύγωνο 3 σημείων

Στο σχήμα φαίνεται η εφαρμογή της μεθόδου για την απλούστερη περίπτωση σχοινοπολυγώνου με τρεις μόνο πλευρές. Ειδικά στην περίπτωση αυτή είναι δυνατή η άμεση χάραξη σχοινοπολυγώνου S_0, S_1, S_2 με τις πλευρές S_0 και S_1 τέτοιες ώστε να περνούν αντίστοιχα από τα σημεία A και B . Έτσι ορίζεται στο διάγραμμα δυνάμεων ο πόλος O , σαν τομή των πολικών ακτίνων S_0 και S_1 που άγονται αντίστοιχα από τα σημεία a_0 και a_1 , παράλληλες των πλευρών S_0 και S_1 .

Συμπληρώνοντας την πολική ακτίνα S_2 και την παράλληλη προς αυτή πλευρά του σχοινοπολυγώνου από το σημείο v_2 , **ορίζω** σαν ευθεία Culmann την AB και βρίσκω το σημείο C_2 σαν τομή της AB με την προέκταση της S_2 .

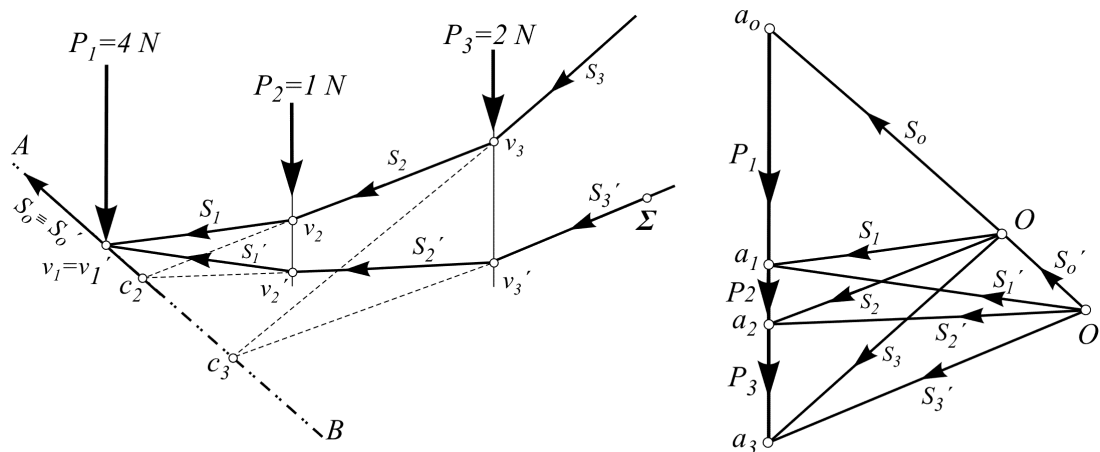
Φέρω τη C_2C , ορίζοντας έτσι την τρίτη πλευρά S_2' του μετασχηματισμένου σχοινοπολυγώνου S_0', S_1', S_2' του οποίου οι δύο πρώτες πλευρές φέρονται πλέον δια των σημείων Β και Α.

Εκ των υστέρων μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι πολικές ακτίνες S_0', S_1' και S_2' που φέρονται αντίστοιχα από τις κορυφές a_0, a_1 και a_2 του δυναμοπολυγώνου παράλληλα προς τις ομώνυμες πλευρές του σχοινοπολυγώνου, τέμνονται στο σημείο O' (νέος πόλος), έτσι ώστε η OO' να είναι παράλληλη της AB .

2.7 – Παραδείγματα

1

Για το σύστημα των τριών παραλλήλων δυνάμεων του σχήματος να χαραχθεί σχοινοπολύγωνο, ώστε η πρώτη πλευρά του να συμπίπτει με την AB , ενώ η τελευταία να περνάει από το σημείο Σ .



Σχ. 2_11 Κατασκευή σχοινοπολυγώνου δι' ευθείας και σημείου

Λύση

Με κλίμακα $1 \text{ cm} \cong 1 \text{ N}$ κατασκευάζω το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων. Από το σημείο a_0 (αρχή της πρώτης δύναμης) φέρνω την a_0O (πρώτη πολική ακτίνα) παράλληλη της AB και παίρνω σ' αυτή ένα τυχαίο σημείο O , από όπου συμπληρώνω τις υπόλοιπες πολικές ακτίνες.

Ξεκινώντας από την An_1 στο διάγραμμα θέσης, συμπληρώνω τις υπόλοιπες πλευρές S_1, S_2, S_3 του αρχικού σχοινοπολυγώνου, με την S_3 εκτός Σ .

Θεωρώ ήδη την AB σαν ευθεία Culmann, και βρίσκω το σημείο c_3 σαν τομή αυτής με την προέκταση της S_3 , καθώς επίσης (προαιρετικά) το σημείο c_2 σαν τομή της AB με την προέκταση της S_2 .

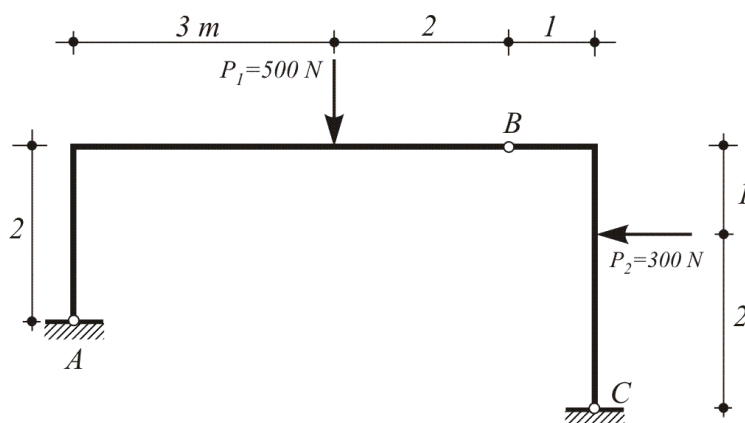
Ενώνω το c_3 με το Σ , προσδιορίζοντας έτσι την S_3' , και το σημείο τομής της v_3' με την P_3 .

Όμοια, ενώνω το c_2 με το v_3' , προσδιορίζοντας έτσι την S_2' , και το σημείο τομής της v_2' με την P_2 .

Η πλευρά S_1' ταυτίζεται με τη v_{1v_2}' .

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε εκ των υστέρων, ότι οι πολικές ακτίνες S_3' , S_2' και S_1' που φέρονται αντίστοιχα από τις κορυφές a_3 , a_2 και a_1 του δυναμοπολυγώνου παράλληλα προς τις ομώνυμες πλευρές του σχοινοπολυγώνου S_3' , S_2' και S_1' , τέμνονται σε σημείο O' της a_0O , που είναι ο νέος πόλος.

2 Με τη βοήθεια σχοινοπολυγώνου δια τριών σημείων, να προσδιοριστούν οι αντιδράσεις A και C καθώς και η δύναμη που διαβιβάζεται μέσω της άρθρωσης, στον τριαρθρωτό φορέα του παρακάτω σχήματος με την εικονιζόμενη φόρτιση. Δίνεται ότι $P_1 = 500 \text{ N}$ και $P_2 = 300 \text{ N}$.



Σχ. 2_12

Λύση

Για τον τριαρθρωτό φορέα, που απλά γνωρίσαμε στην ενότητα 1.13, θα αναφερθούμε διεξοδικότερα στο 8^ο κεφάλαιο. Εδώ θα περιοριστούμε απλά στη χρησιμότητα του σχοινοπολυγώνου δια τριών σημείων, ειδικά για την περίπτωση τριαρθρωτού τόξου.

Λόγω της μορφής που έχει ένας τριαρθρωτός φορέας, να αποτελείται από δύο τμήματα που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους, (άρθρωση B) καθώς και με το έδαφος (αρθρώσεις A και C), έπεται ότι σε κάθε άρθρωση εμφανίζεται μια δύναμη, η οποία για μεν τις A και C είναι αντίδραση (αφού οι αρθρώσεις αυτές είναι στηρίξεις), για δε τη B μεταβιβαζόμενη από το ένα τμήμα στο άλλο, δύναμη.

Αν λοιπόν \bar{A} και \bar{C} είναι αντίστοιχα οι αντιδράσεις του τόξου στα A και C, τότε, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία του φορέα, θα πρέπει η

συνισταμένη των \bar{A} και P_1 που δρουν στο τμήμα AB να είναι ίση, αντίθετη και στον ίδιο φορέα κείμενη με τη συνισταμένη των \bar{C} , P_2 του τμήματος CB .

Όμως αυτή η περίπτωση είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μόνον όταν κατασκευαστεί το σχοινοπολύγωνο των δυνάμεων P_1, P_2 (S'_0, S'_1, S'_2) δια των σημείων A, B και C αντίστοιχα, όπου $\bar{A} \equiv S'_0$ και $\bar{C} \equiv -S'_2$.

Πραγματικά, είναι φανερό ότι σε μια τέτοια κατασκευή προσδιορίζεται βασικά ο φορέας της συνισταμένης των P_1 και P_2 εντοπίζοντας την τομή της πρώτης και τελευταίας πλευράς του σχοινοπολυγώνου. Όμως, βλέποντας το θέμα από άλλη οπτική γωνία, σύμφωνα με το σκεπτικό κατασκευής του σχοινοπολυγώνου, μπορούμε κάλλιστα να θεωρήσουμε ότι η συνισταμένη των P_1, P_2 αναλύεται σε δύο συνιστώσες, που είναι η $-S'_0$ και η S'_2 .

Επομένως για να ισορροπεί ο φορέας, θα πρέπει οι αντιδράσεις στα A και C να εξουδετερώνουν τις αντίστοιχες συνιστώσες της συνισταμένης, οπότε υποχρεωτικά θα πρέπει

$$\bar{A} \equiv -(-S'_0) \equiv S'_0 \quad \text{και} \quad \bar{C} \equiv -S'_2.$$

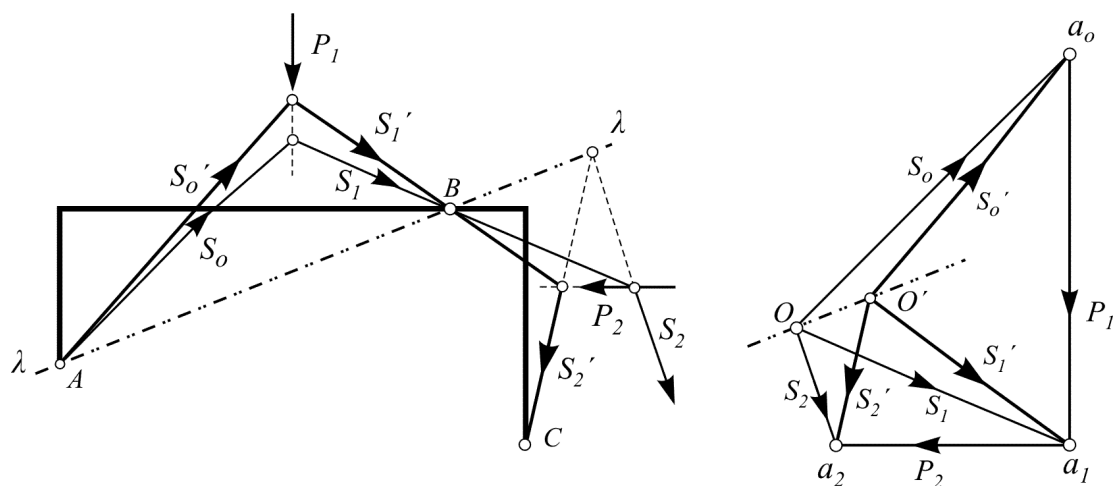
Όσο για τη δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω της άρθρωσης B , αυτή (η δύναμη) θα είναι η **δεύτερη** πλευρά του σχοινοπολυγώνου, αφού είναι η συνισταμένη των S_0 ($\equiv \bar{A}$) και P_1 , η οποία μάλιστα, θεωρούμενη σαν συνισταμένη των $-S_2$ ($\equiv \bar{C}$) και P_2 είναι ίση, αντίθετη και στον ίδιο φορέα κείμενη με την προηγούμενη.

Συνεπώς ο προσδιορισμός των αντιδράσεων και της δύναμης που μεταβιβάζεται μέσω της άρθρωσης ενός τριαρθρωτού τόξου, στα τμήματα I και II του οποίου ενεργούν οι δυνάμεις (ή συνισταμένες δυνάμεων) P_1 και P_2 , αντίστοιχα **ταυτίζεται** με την κατασκευή σχοινοπολυγώνου δια τριών σημείων (στήριξη - άρθρωση - στήριξη).

Σημειώνεται ότι κάθε στήριξη του τόξου, θα πρέπει να κείται στην πλευρά εκείνη του σχοινοπολυγώνου ($1^{\text{η}}$ ή $3^{\text{η}}$), η οποία (πλευρά) τέμνει την αντίστοιχη δύναμη του τμήματος.

Για την κατασκευή του παραπάνω σχοινοπολυγώνου, ακολουθήθηκε ακριβώς η ίδια διαδικασία μ' εκείνη που ακολουθήθηκε στην περίπτωση (γ) της ενότητας 2.6, όπου αόριστα κατασκευάστηκε σχοινοπολύγωνο δια τριών σημείων. Μάλιστα διατηρήθηκε και ο ίδιος συμβολισμός των σημείων ή διανυσμάτων, ώστε να διευκολύνεται η συσχέτισή τους.

Σύμφωνα λοιπόν με την κλίμακα που εκλέχτηκε στο διάγραμμα δυνάμεων, προκύπτουν:



Σχ. 2_13 Γραφικός προσδιορισμός αντιδράσεων με τη βοήθεια σχοινοπολυγώνου 3 σημείων

$$\bar{A} = S_0' = 400 \text{ N}$$

$$\bar{C} = -S_2' = 195 \text{ N}$$

$$\bar{B} = \pm S_1' = 330 \text{ N.}$$

Το \pm της \bar{B} δικαιολογείται από το γεγονός ότι η δύναμη αυτή, θεωρούμενη σαν δράση, του ενός τμήματος είναι αντίδραση στο άλλο.

2.8 – Συνθήκες ισορροπίας

Από όσα έχουν εκτεθεί έως εδώ για τη γραφική σύνθεση ομοεπιπέδων δυνάμεων, συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε σύστημα δυνάμεων είναι **ισοδύναμο** με σύστημα που αποτελείται από **δύο** μόνο δυνάμεις.

α) Τη δύναμη $-S_0$, που είναι ίση, αντίθετη και στον ίδιο φορέα κείμενη προς την αυθαίρετη πρώτη πλευρά του σχοινοπολυγώνου S_0 και

β) Τη δύναμη S_n , τελευταία πλευρά του σχοινοπολυγώνου.

Οι φορείς των δυνάμεων αυτών είναι αντίστοιχα παράλληλοι προς την πρώτη και τελευταία πολική ακτίνα του διαγράμματος δυνάμεων. Οι φορές τους όμως, όπως πάλι από το διάγραμμα προκύπτει, ορίζονται, της μεν πρώτης από την πρώτη κορυφή του δυναμοπολυγώνου προς τον πόλο, της δε δεύτερης από τον πόλο προς την τελευταία κορυφή του δυναμοπολυγώνου.

Συνεπώς:

1. Όταν το δυναμοπολύγωνο ενός επιπέδου συστήματος δυνάμεων είναι **ανοικτό**, τότε το σύστημα ανάγεται σε μοναδική συνισταμένη, διότι $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.
2. Όταν το δυναμοπολύγωνο επιπέδου συστήματος δυνάμεων είναι **κλειστό**, τότε δεν υπάρχει συνισταμένη διότι $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Άρα η πρώτη

και η τελευταία πολική ακτίνα συμπίπτουν ($S_o \equiv S_v$) και οι δυνάμεις (πλευρές του σχοινοπολύγωνου) $-S_o$ και S_v είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Το ερώτημα που τίθεται σ' αυτή την περίπτωση είναι αν ο φορέας **ισορροπεί**. Διακρίνουμε λοιπόν τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Αν οι $-S_o$ και S_v **δεν** ευρίσκονται στην ίδια ευθεία αλλά απέχουν μεταξύ τους απόσταση d , οπότε το **σχοινοπολύγωνο** είναι **ανοιχτό**, τότε το σύστημα των δυνάμεων **δεν ισορροπεί** αλλά ισοδυναμεί με ζεύγος δυνάμεων, του οποίου η ροπή είναι $M = S_v \cdot d$ ή $M = S_o \cdot d$.

β) Αν οι $-S_o$ και S_v ευρίσκονται στην ίδια ευθεία, οπότε και το **σχοινοπολύγωνο** είναι **κλειστό**, τότε το σύστημα των δυνάμεων **ισορροπεί**, διότι είναι $M = 0$.

Ένστε λοιπόν γενικά συμπεραίνουμε ότι:

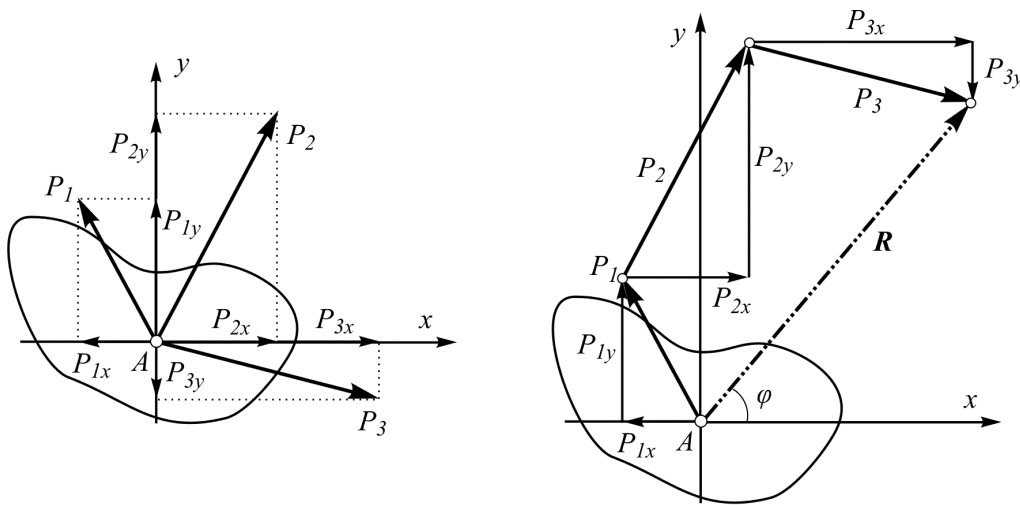
Για να βρίσκεται ένα επίπεδο σύστημα δυνάμεων σε **ισορροπία**, πρέπει και αρκεί το **δυναμοπολύγωνο** και το **σχοινοπολύγωνο** του συστήματος να είναι **κλειστά**.

Κεφάλαιο 3^ο

Αναλυτικές μέθοδοι

3.1 – Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα, σε ένα σημείο A του οποίου ασκούνται οι συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις P_1, P_2, P_3 .



Σχ. 3_1 Αντιστοίχιση αναλυτικής και γραφικής διαδικασίας

Εγκαθιστούμε στο A ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xAy , και, χρησιμοποιώντας τη μέχρι τώρα εμπειρία μας, κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 , προσδιορίζοντας έτσι τη συνισταμένη τους R . Παρατηρούμε ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των οριζοντίων προβολών των δυνάμεων ισούται με την οριζόντια προβολή της συνισταμένης τους. Αντίστοιχα:

β) Το αλγεβρικό άθροισμα των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων ισούται με την κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης τους.

Ώστε λοιπόν αν R_x και R_y είναι αντίστοιχα η οριζόντια και η κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης R του συστήματος των επιπέδων συντρέχουσών δυνάμεων P_i και φ η γωνία που σχηματίζει η R με τον οριζόντιο άξονα x , τότε είναι δυνατό να προσδιοριστεί το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της R από τις σχέσεις:

$$R_y = \sum P_{iy} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

$$R_x = \sum P_{ix} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

$$\text{Μέτρο: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (1)$$

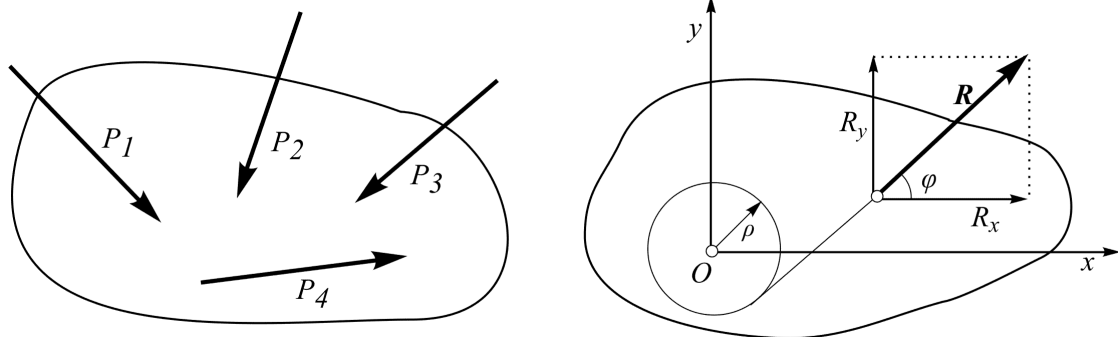
$$\text{Διεύθυνση: } \varepsilon\varphi\varphi = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \varphi = \text{τοξ}\varepsilon\varphi \frac{R_y}{R_x} \quad (2)$$

$$\text{Φορά: } \text{πρόσημο } R_x, \text{ πρόσημο } R_y \quad (3)$$

Είναι φανερό ότι ο φορέας της R θα περνάει από το A .

3.2 – Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις

Θεωρούμε απόλυτα στερεό σώμα, σε διάφορα σημεία του οποίου ασκούνται οι ομοεπίπεδες δυνάμεις $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$



Σχ. 3_2 Σχηματική διαδικασία σύνθεσης ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων

Ένα τέτοιο σύστημα δυνάμεων ανάγεται γενικά σε μια συνισταμένη δύναμη $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$ και μια ροπή, οι οποίες αναλυτικά ορίζονται ως εξής:

Εγκαθιστούμε στο επίπεδο των δυνάμεων ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xOy (συνήθως στην τομή δύο δυνάμεων).

Τότε το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών ορίζονται, όπως και στην περίπτωση των συντρεχουσών δυνάμεων, από τις σχέσεις (1), (2), και (3).

Απομένει ο καθορισμός του **φορέα** της R . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα του **Varignon**, που ορίζει ότι:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών συστήματος ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο του επιπέδου των, ισούται προς τη ροπή της συνισταμένης των ως προς το ίδιο σημείο.

Αν λοιπόν $(\sum M_i)_{O^{+}}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων (ή των συνιστωσών τους πάνω στους άξονες x, y) ως προς σημείο O (που συνήθως είναι η αρχή του συστήματος αναφοράς) και R η συνισταμένη τους σε απόσταση ρ από το O , τότε προκύπτει η σχέση:

$$(\Sigma M_i)_{O^{\perp+}} = R \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{(\Sigma M_i)_{O^{\perp+}}}{R}$$

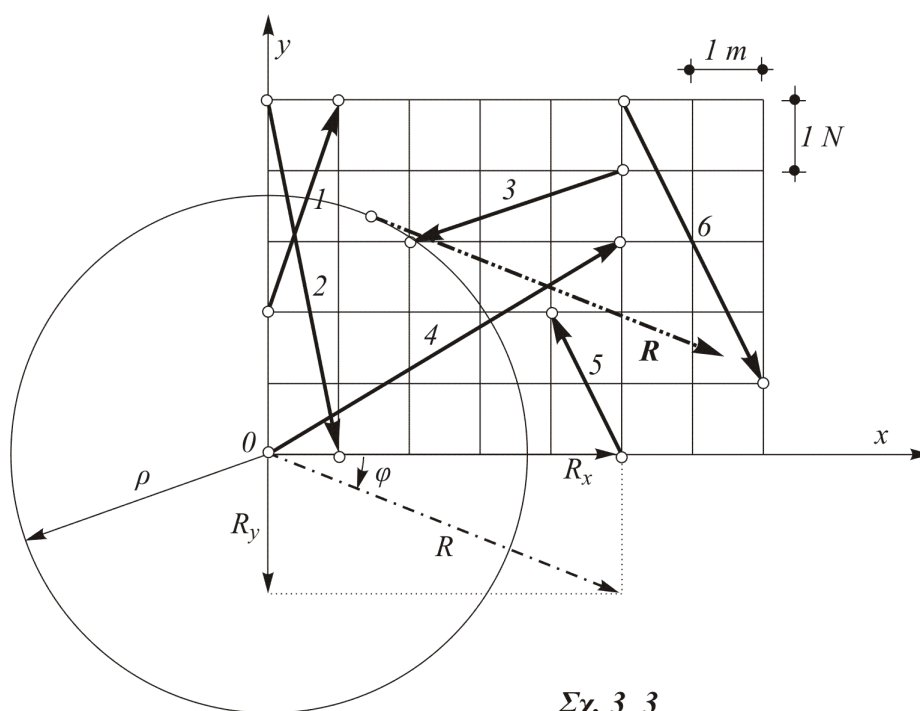
Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον προσδιορισμό της απόστασης ρ , που αποτελεί την ακτίνα του κύκλου, στον οποίο φέρνουμε την εφαπτομένη που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα R (R_x, R_y), γνωστό ήδη από πριν.

Επειδή το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, εκλέγεται η εφαπτομένη εκείνη, η οποία ως προς το σημείο O δίνει ροπή θετική ή αρνητική, αντίστοιχη προς το πρόσημο του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών $(\Sigma M_i)_{O^{\perp+}}$.

3.3 – Παράδειγμα

Στο εικονιζόμενο σύστημα ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων, που δίνεται σε τετραγωνικό κάναβο με κλίμακα πλευράς $a \nabla 1 \text{ N}$ και $a \nabla 1 \text{ m}$, να προσδιοριστεί αναλυτικά η συνισταμένη.

Λύση



Σχ. 3_3

Θεωρούμε το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy . Αν R_x και R_y είναι αντίστοιχα η οριζόντια και η κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης και φ η γωνία της με τον οριζόντιο άξονα, τότε θα είναι:

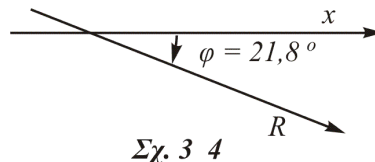
$$R_x = \Sigma P_{ix} = 1 + 1 - 3 + 5 - 1 + 2 = 5 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma P_{iy} = 3 - 5 - 1 + 3 + 2 - 4 = -2 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = 5,39 \text{ N}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{5} = -0,4 \Rightarrow \varphi = -21,8^\circ$$

Και επειδή πρόσημο $R_x = +$, πρόσημο $R_y = -$, η φορά της R , όπως φαίνεται στο σχήμα 3_4 που ακολουθεί, θα είναι:



Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Varignon για τις ροπές των προβολών των δυνάμεων ως προς το O και τη ροπή της R , θα έχουμε:

$$(\Sigma M_i)_{O^{+}} = R \cdot \rho \Rightarrow 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 5,39 \cdot \rho$$

$$\text{Άρα: } +20,00 = 5,39 \cdot \rho \text{ και } \rho = 3,71 \text{ m.}$$

Για να κατασκευάσουμε τη συνισταμένη R , γράφουμε περιφέρεια κύκλου με κέντρο το O και ακτίνα $\rho = 3,71 \text{ m}$ ($= 3,71 \text{ cm}$).

Στη συνέχεια φέρνουμε την εφαπτόμενη του κύκλου που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(5, -2)$, εκείνη, που δίνει ως προς το O **Θετική** ροπή, επειδή η ροπή $(\Sigma M_i)_{O^{+}}$ που βρήκαμε είναι θετική.

3.4 – Δυνάμεις στο χώρο

Στους φορείς που εκτείνονται στο χώρο, ενεργούν διάφορα συστήματα δυνάμεων τα οποία γενικά δεν είναι συνεπίπεδα. Με τέτοια συστήματα δυνάμεων θα ασχοληθούμε παρακάτω, περιοριζόμενοι κυρίως στη σύνθεσή τους, και, ακολουθώντας μεθόδους ανάλογες με εκείνες που ήδη χρησιμοποιήσαμε για τις δυνάμεις στο επίπεδο, να γνωρίσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε τα παραπάνω συστήματα δυνάμεων να βρίσκονται σε ισορροπία.

Η σύνθεση θα αφορά σε πρώτο στάδιο δυνάμεις του κεντρικού συστήματος, δηλαδή δυνάμεις στο χώρο που περνούν από το ίδιο σημείο, επομένως είναι συντρέχουσες.

Η διαδικασία της σύνθεσης θα περιλαμβάνει γραφικές και αναλυτικές μεθόδους.

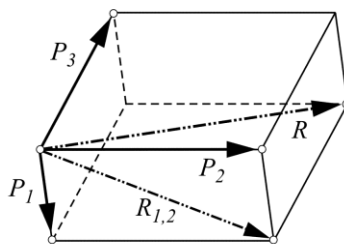
3.4.1 – Γραφική σύνθεση δυνάμεων

Εφαρμόζοντας και εδώ διαδοχικά τον κανόνα του παραλληλογράμμου, μπορούμε, κατ' αναλογία προς τις επίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις, να προσδιορίσουμε τη συνισταμένη συντρεχουσών δυνάμεων στο χώρο.

Αυτό γίνεται, επειδή, κάθε φορά η μερική συνισταμένη, που περνάει από το κοινό σημείο εφαρμογής, είναι συνεπίπεδη (σε διαφορετικό επίπεδο) με την επόμενη δύναμη που πρόκειται να συντεθεί.

Επομένως η ολική συνισταμένη είναι δύναμη που περνάει πάλι από το κοινό σημείο, με μέτρο, διεύθυνση και φορά που ορίζονται από την αρχή και το τέλος του στρεβλού δυναμοπολυγώνου που έχει πλευρές τα διανύσματα των δυνάμεων που πρόκειται να συντεθούν.

Οι δυνάμεις αυτές ισορροπούν μόνον όταν η συνισταμένη τους μηδενίζεται, δηλαδή όταν το δυναμοπολύγωνο των συνιστωσών είναι κλειστό.



Σχ. 3_5 Γραφική αναπαράσταση σύνθεσης δυνάμεων στο χώρο

Στην πιο απλή περίπτωση, τριών συντρεχουσών δυνάμεων του χώρου, η συνισταμένη μπορεί να παρασταθεί με το διάνυσμα της διαγωνίου του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες προς τις δυνάμεις, συντρέχουσες ακμές του.

Ο κανόνας αυτός αποτελεί προφανώς επέκταση του νόμου του παραλληλογράμμου στον τρισδιάστατο χώρο. Μάλιστα το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **γενικά τρεις δυνάμεις που ισορροπούν, είναι υποχρεωτικά συνεπίπεδες**, επειδή διαφορετικά, αν δηλαδή οι δυνάμεις είναι στο χώρο, δεν μπορεί να είναι μηδενική η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου των.

Γενικότερα, αν συντρέχουσες και συνεπίπεδες πλην μιας μόνο δύναμης βρίσκονται σε ισορροπία, τότε η μοναδική αυτή δύναμη είναι ίση με μηδέν.

Αντιστρέφοντας το σκεπτικό της παραπάνω κατάστασης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συνιστώσες μιας γνωστής δύναμης κατά τρεις γνωστές, μη συνεπίπεδες διευθύνσεις, ταυτίζονται με τις τρεις αντίστοιχες ακμές του παραλληλεπιπέδου που έχει διαγώνιο τη γνωστή δύναμη.

Είναι όμως γνωστό ότι στο χώρο, κατά την αξονομετρική σχεδίαση των δυναμοπολυγώνων, γενικά δεν απεικονίζουμε τα πραγματικά μήκη των δυνάμεων. Έτσι καταφεύγουμε σε μεθόδους της Παραστατικής Γεωμετρίας, όπου, με κατάλληλες κατακλίσεις, μπορούμε τελικά να παίρνουμε τα κατάλληλα μήκη. Σχετικά αναφέρουμε την παρακάτω χρήσιμη πρόταση:

Σε ένα σύστημα δυνάμεων P_i στο χώρο, η **συνισταμένη** R' των **προβολών** P_i' των δυνάμεων αυτών πάνω σε ένα επίπεδο, **συμπίπτει με την προβολή της συνισταμένης** R των δυνάμεων P_i πάνω στο ίδιο επίπεδο.

3.4.2 – Αναλυτική σύνθεση δυνάμεων

Η μέθοδος των προβολών, που χρησιμοποιήσαμε για την αναλυτική σύνθεση συνεπιπέδων συντρεχουσών δυνάμεων, προσφέρεται ιδιαίτερα και στην περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων στο χώρο.

Πραγματικά, επεκτείνοντας το σκεπτικό της προβολής μιας δύναμης P_i όχι σε δύο αλλά σε τρεις άξονες x, y, z του τρισσορθογώνιου συστήματος αναφοράς, διαπιστώνουμε ότι η τυχούσα δύναμη P_i , αν θεωρηθεί σαν διαγώνιος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (του οποίου οι συντρέχουσες ακμές ταυτίζονται με τους άξονες), δίνει, στους τρεις αυτούς άξονες, συνιστώσες X_i, Y_i και Z_i αντίστοιχα, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_i = P_i \sin \alpha_i, \quad Y_i = P_i \sin \beta_i, \quad Z_i = P_i \sin \gamma_i, \quad (i)$$

όπου $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ είναι οι γωνίες των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy, Oz με τη δύναμη P_i .

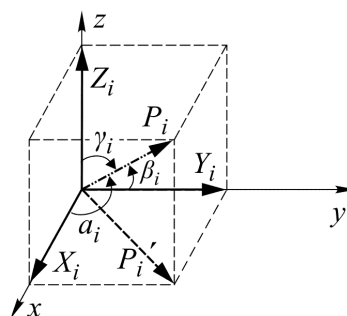
Αλλά και αντίστροφα, αν δοθούν οι τρεις συνιστώσες X_i, Y_i και Z_i , καθορίζεται μονοσήμαντα η P_i .

Πραγματικά, το μέτρο της P_i προσδιορίζεται σαν μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από τη σχέση

$$P_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}, \quad (ii)$$

οι δε **γωνίες κατευθύνσεως** α_i, β_i και γ_i από τις σχέσεις

$$\sin \alpha_i = X_i/P_i, \quad \sin \beta_i = Y_i/P_i, \quad \text{και} \quad \sin \gamma_i = Z_i/P_i. \quad (iii)$$



Σχ. 3_6 Συσχετισμός γωνιών και συνημιτόνων κατευθύνσεως

Είναι αξιοπρόσεχτο ότι τα τρία **συνημίτονα κατευθύνσεως** συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\sin^2 \alpha_i + \sin^2 \beta_i + \sin^2 \gamma_i = 1, \quad (iv)$$

που προκύπτει από τη σχέση (ii), αν θέσουμε σ' αυτή τις τιμές που προκύπτουν από τις σχέσεις (i).

Συνεπώς η συνισταμένη R ενός συστήματος συντρεχουσών δυνάμεων P_i στο χώρο, καθορίζεται πλήρως από τις τρεις προβολές της X_R, Y_R, Z_R πάνω στους αντίστοιχους άξονες. Οι προβολές αυτές είναι ίσες με τα αλγεβρικά αθροίσματα των αντίστοιχων προβολών των δυνάμεων που πρόκειται να συντεθούν. Δηλαδή

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad \text{και} \quad Z_R = \sum Z_i.$$

Για να ισορροπεί ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων, θα πρέπει η συνισταμένη του να είναι μηδέν. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται με τις σχέσεις

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \quad (v)$$

που μηδενίζουν ουσιαστικά τις τρεις προβολές της συνισταμένης.

Οι σχέσεις αυτές είναι γενικά αναγκαίες, αλλά στην προκειμένη περίπτωση και ικανές, επειδή η περίπτωση ζεύγους δυνάμεων αποκλείεται, αφού η ροπή όλων των συνιστωσών ως προς το κοινό σημείο εφαρμογής μηδενίζεται.

3.5 – Παραδείγματα

1

Τα μέτρα τριών συντρεχουσών δυνάμεων P_1, P_2, P_3 είναι αντίστοιχα 40, 10, 30 N, ενώ οι φορείς των με τις αντίστοιχες διευθύνσεις OA, OB, OG φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

Να υπολογιστεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης R των δυνάμεων αυτών.

Λύση

Επιδίωξή μας είναι να υπολογίσουμε τις προβολές κάθε δύναμης πάνω στους τρεις άξονες. Γι αυτό χρειαζόμαστε τα συνημίτονα κατευθύνσεως για κάθε δύναμη.

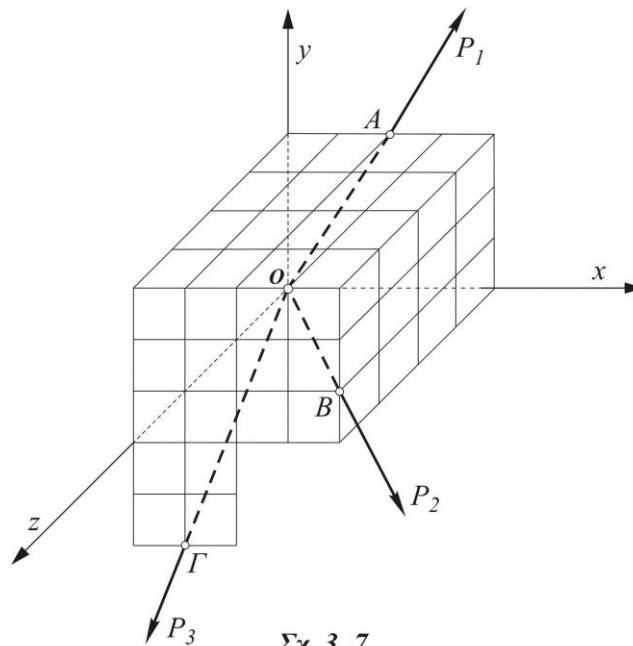
Από τις συντεταγμένες των σημείων A, B, G υπολογίζουμε τα μήκη OA, OB και OG . Είναι:

$$OA = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{13}$$

$$OB = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33}$$

$$OG = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

Με τις τιμές αυτές υπολογίζουμε, σύμφωνα με τις σχέσεις (iii), τα συνημίτονα κατευθύνσεως των φορέων των δυνάμεων.



Σχ. 3_7

	συνα _i	συνβ _i	συνγ _i
ΟΑ:	$\frac{2}{\sqrt{13}} = 0,555$	$\frac{3}{\sqrt{13}} = 0,832$	$\frac{0}{\sqrt{13}} = 0$
ΟΒ:	$\frac{4}{\sqrt{33}} = 0,696$	$\frac{1}{\sqrt{33}} = 0,174$	$\frac{4}{\sqrt{33}} = 0,696$
ΟΓ:	$\frac{1}{\sqrt{21}} = 0,218$	$\frac{-2}{\sqrt{21}} = -0,436$	$\frac{4}{\sqrt{21}} = 0,873$

Οι τιμές αυτές καταγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί, για να προκύψουν οι ζητούμενες προβολές των δυνάμεων που θα οδηγήσουν στα αλγεβρικά αθροίσματα για κάθε άξονα.

Δύν	Έντ. Ν	συνα _i	συνβ _i	συνγ _i	P _i συνα _i	P _i συνβ _i	P _i συνγ _i
P ₁	40	0,555	0,832	0	22,2	33,3	0
P ₂	10	0,696	0,174	0,696	7,0	1,7	7,0
P ₃	30	0,218	-0,436	0,873	6,5	-13,1	26,2
Σ Υ Ν Ο Λ Α					35,7	21,9	33,2

Το μέτρο της συνισταμένης R των δυνάμεων, προσδιορίζεται τώρα από την εξίσωση (ii).

$$R = \sqrt{35,7^2 + 21,9^2 + 33,2^2} = 53,45 \text{ N}.$$

Η διεύθυνση και η φορά της R θα υπολογιστούν από τις γωνίες που σχηματίζει η συνισταμένη με καθέναν από τους ημιάξονες του συστήματος. Δηλαδή από τα συνημίτονα κατευθύνσεως του φορέα της.

$$\alpha_R = \arcsin \frac{35,7}{53,45} = 48,09^\circ = 48^\circ 5' 37''$$

$$\beta_R = \arcsin \frac{21,9}{53,45} = 65,81^\circ = 65^\circ 48' 43''$$

$$\gamma_R = \arcsin \frac{33,2}{53,45} = 51,60^\circ = 51^\circ 36' 1''.$$

Για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων επαληθεύουμε την εξίσωση (iv)

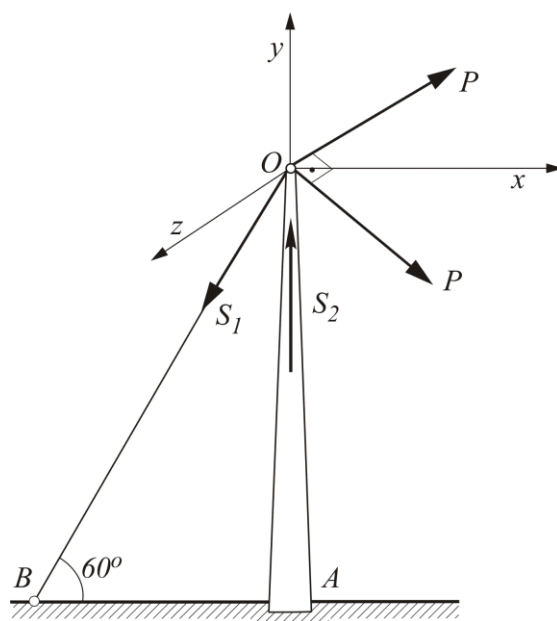
$$\sin^2 \alpha_R + \sin^2 \beta_R + \sin^2 \gamma_R = 1, \quad \text{δηλαδή}$$

$$0,446 + 0,168 + 0,386 = 1 !.$$

2 Δύο ίσες, οριζόντιες και κάθετες μεταξύ τους δυνάμεις P εφαρμόζονται στην κορυφή κατακόρυφου ιστού.

Για την αποφυγή κάμψης του ιστού και τη διατήρησή του σε κατακόρυφη θέση, χρησιμοποιείται καλώδιο, το οποίο, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, σχηματίζει με το έδαφος γωνία 60° .

Αν $P = 100 \text{ N}$, να υπολογιστούν οι αξονικές δυνάμεις που εμφανίζονται στο καλώδιο και στον ιστό.



Σχ. 3_8

Λύση

Εγκαθιστούμε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων x, y, z στην κορυφή O του ιστού και εξετάζουμε τις συνθήκες ισορροπίας του δακτυλίου αυτής O .

Για να αποφύγουμε κάθε κίνδυνο κάμψης του ιστού (λόγω μερικής τουλάχιστον πάκτωσης στη βάση του), θα πρέπει η δύναμη S_2 που ασκείται από τον ιστό στο δακτύλιο να έχει τη διεύθυνση του άξονα OA του ιστού.

Επειδή όμως η δύναμη S_1 του καλωδίου έχει τη διεύθυνση της OB , εύκολα κατασκευάζεται το σύστημα των δυνάμεων που δρουν στο O , όπου, το επίπεδο xoy (που ταυτίζεται με το OAB) διχοτομεί την ορθή γωνία των δυνάμεων P .

Μηδενίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών όλων των δυνάμεων που δρουν στο O κατά τη διεύθυνση του άξονα x (οι φορείς των αγνώστων S_1 και S_2 έχουν ληφθεί αυθαίρετα), παίρνουμε

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_1 \sin 60^\circ + 2P \sin 45^\circ = 0,$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$S_1 = 2P \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2P\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad S_1 = 283 \text{ N}.$$

Το θετικό πρόσημο της S_1 σημαίνει ότι η αυθαίρετη εφελκυστική φορά που εκλέχτηκε είναι σωστή. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή το πρόσημο που προκύπτει από την επίλυση μιας άγνωστης δύναμης (της οποίας η φορά έχει εκλεγεί αυθαίρετα) είναι αρνητικό, αυτό σημαίνει ότι η σωστή φορά της δύναμης είναι αντίθετη από αυτή που εκλέχτηκε.

Για τον προσδιορισμό της αξονικής δύναμης S_2 που αναπτύσσεται στον ιστό, μηδενίζουμε, όπως προηγουμένως, το αλγεβρικό άθροισμα των κατακόρυφων προβολών όλων των δυνάμεων που δρουν στο O (άξονας y).

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow S_2 - S_1 \sin 30^\circ = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$S_2 = S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 245 \text{ N}.$$

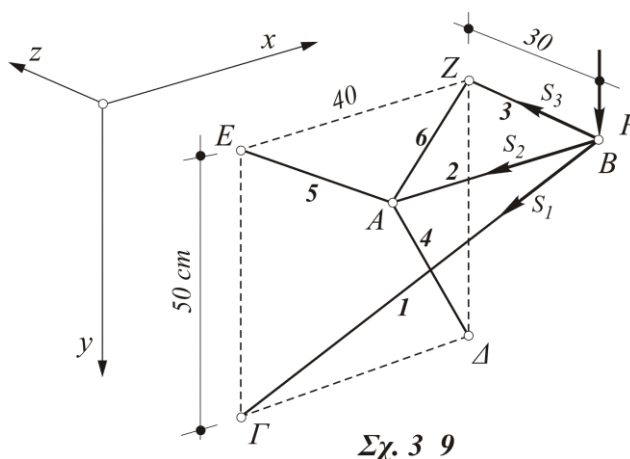
3

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα σύστημα ράβδων οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ των , σχηματίζοντας έτσι ένα δικτύωμα στο χώρο. Τα τετράπλευρα $ABZE$ και $\Gamma\Delta EZ$ είναι ορθογώνια, η ράβδος EZ είναι οριζόντια, ενώ τα σημεία Γ , Δ , Z , E βρίσκονται σε κατακόρυφο επίπεδο. Με τη διαστασιολόγηση του συστήματος, να υπολογιστούν οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του, λόγω κατακόρυφου φορτίου P στο B .

Λύση

Σύμφωνα με τις σχέσεις (v), η συνθήκη ισορροπίας συντρεχουσών δυνάμεων, εκφράζεται με το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των προβολών όλων των δυνάμεων που δρουν στο κοινό σημείο, διαδοχικά σε

καθέναν από τους τρεις άξονες του τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Και επειδή ο αριθμός των διατιθεμένων εξισώσεων είναι 3, έπεται ότι και ο μέγιστος αριθμός των αγνώστων δυνάμεων (με γνωστές διευθύνσεις) που συντρέχουν σε ένα σημείο (κόμβο) του δικτυώματος, θα είναι πάλι 3.



Σχ. 3_9

Με το σκεπτικό αυτό ξεκινάμε εξετάζοντας την ισορροπία του κόμβου Β, στον οποίο συντρέχουν οι 3 άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 1, 2, 3. Οι δυνάμεις αυτές είναι αξονικές, δηλαδή έχουν τη διεύθυνση της αντίστοιχης ράβδου, λόγω της αρθρωτής μεταξύ των ράβδων σύνδεσης.

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα συνημίτονα κατευθύνσεως της ράβδου 1 ως προς το σύστημα συντεταγμένων, προσδιορίζουμε αρχικά το μήκος της ράβδου ΒΓ. Είναι λοιπόν

$$B\Gamma = \sqrt{30^2 + 40^2 + 50^2} = 50\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Θεωρούμε τις δυνάμεις S_1 , S_2 , S_3 των αντιστοίχων ράβδων εφελκυστικές, οπότε το θετικό ή αρνητικό πρόσημο που θα βρεθεί, επειδή θα δείχνει τη σωστή ή λάθος επιλογή της φοράς, θα εκφράζει ταυτόχρονα και την πραγματική εντατική κατάσταση (εφελκυσμός ή θλίψη) για την κάθε ράβδο.

Μηδενίζοντας λοιπόν τα αλγεβρικά αθροίσματα των προβολών των τεσσάρων δυνάμεων του κόμβου Β, πάνω στους άξονες x , y , z του σχήματος, παίρνουμε διαδοχικά τις εξισώσεις:

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_2 - \frac{40}{50\sqrt{2}} S_1 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma y^{\downarrow+} = 0 \quad \Rightarrow \quad P + \frac{50}{50\sqrt{2}} S_1 = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma z^{\nwarrow+} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 + \frac{30}{50\sqrt{2}} S_1 = 0 \quad (3)$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει

$$S_1 = -1,41 \cdot P,$$

οπότε, θέτοντας την τιμή αυτή της S_1 στην εξίσωση (1), παίρνουμε

$$S_2 = -\frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot (-1,41 P) = 0,8 P.$$

Όμοια, θέτοντας την τιμή της S_1 στην (3), έχουμε

$$S_3 = -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot (-1,41 P) = 0,6 P.$$

Το αρνητικό πρόσημο της S_1 σημαίνει ότι η ράβδος 1 θλίβεται.

Η μελέτη της ισορροπίας του κόμβου Α και ο αντίστοιχος υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων των ράβδων 4, 5 και 6 αφήνεται στο σπουδαστή, ώστε να αποτελέσει γι' αυτόν ένα είδος εξάσκησης.

Σημειώνεται μόνον, ότι προτού εξεταστεί η ισορροπία του κόμβου Α, θα πρέπει να τοποθετηθεί σ' αυτόν η γνωστή πλέον δύναμη της ράβδου 2, η οποία, σαν εφελκυστική, θα έχει τώρα φορά **αντίθετη** από αυτή που βρέθηκε στην εξέταση ισορροπίας του κόμβου Β.

Κεφάλαιο 4^ο

Κέντρα βάρους

Είναι γνωστό ότι όλα τα σώματα αποτελούνται από μικρά τεμάχια ύλης σε καθένα από τα οποία ενεργεί δύναμη ίση με το βάρος του, με κατεύθυνση προς το κέντρο της γης.

Η συνισταμένη όλων αυτών των παραλλήλων δυνάμεων ονομάζεται **βάρος** του σώματος.

Το σημείο εκείνο της ύλης του, όπου εφαρμόζεται η συνισταμένη αυτή ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος.

Είναι φανερό ότι αν το σώμα στραφεί, οι δυνάμεις θα παραμείνουν παράλληλες μεταξύ τους και θα έχουν συνισταμένη που θα εφαρμόζεται στο ίδιο σημείο όπως προηγούμενα. Επομένως το κέντρο βάρους ενός σώματος είναι το σημείο εκείνο, από το οποίο περνάει η συνισταμένη των δυνάμεων βαρύτητας για οποιαδήποτε θέση του σώματος.

Αντίστοιχα προς το κέντρο βάρους σώματος έχουμε κέντρο βάρους γραμμών και επιφανειών, το οποίο ονομάζουμε **κεντροειδές**.

Για να βρούμε το κεντροειδές μιας επιφάνειας παίρνουμε σε δυνάμεις τα εμβαδά των τμημάτων της, ενώ για το κεντροειδές μιας γραμμής τα μήκη των τμημάτων της.

Κάθε άξονας που περνάει από το κέντρο βάρους σώματος, επιφάνειας ή γραμμής ονομάζεται **κεντροβαρικός**.

Μια ευθεία συμμετρίας αποτελεί κεντροβαρικό άξονα.

Το κέντρο βάρους ενός σώματος μπορούμε να το βρούμε στην τομή κεντροβαρικών αξόνων του.

4.1 – Κεντροειδές επιφανειών

Για τον προσδιορισμό του κεντροειδούς μιας επιφάνειας είναι δυνατόν να εφαρμοστεί γραφική ή αναλυτική μέθοδος.

Στη γραφική μέθοδο, χωρίζεται η επιφάνεια που δίδεται, σε άλλες, μικρότερες επιφάνειες των οποίων το κεντροειδές είναι γνωστό, π.χ. ορθογώνια, τρίγωνα κλπ. με εμβαδά f_1, f_2, \dots, f_n αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θεωρώντας το εμβαδόν της κάθε επί μέρους επιφάνειας σαν ένταση κάποιας δύναμης, της οποίας είναι γνωστό το σημείο εφαρμογής καθώς και η διεύθυνση και φορά της την οποία καθορίζουμε, βρίσκουμε με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και σχοινοπολυγώνου, τη συνισταμένη τους κατά θέση.

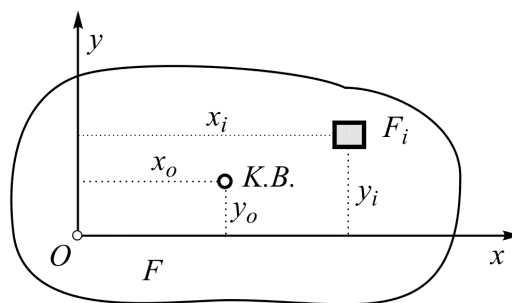
Σχεδιάζοντας πάλι τις παραπάνω δυνάμεις, με το ίδιο σημείο εφαρμογής και μέγεθος, όμως κατά μια άλλη διεύθυνση, προσδιορίζουμε ξανά τη συνισταμένη τους.

Το σημείο τομής των συνισταμένων, είναι το ζητούμενο κεντροειδές της επιφάνειας.

Για τον **αναλυτικό** προσδιορισμό του κεντροειδούς μιας επιφάνειας, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν γενικά οι σχέσεις:

$$x_o = \frac{S_y}{F} = \frac{\Sigma(F_i x_i)}{\Sigma F_i}$$

$$y_o = \frac{S_x}{F} = \frac{\Sigma(F_i y_i)}{\Sigma F_i}$$



Σχ. 4_1 Συσχετισμός συντεταγμένων κεντροειδούς και απειροστής επιφάνειας

όπου x_o , y_o οι συντεταγμένες του κεντροειδούς της επιφάνειας, και F_i μια στοιχειώδης επιφάνεια της οποίας το κεντροειδές έχει συντεταγμένες x_i και y_i . Ο όρος S_x (ή S_y), που ονομάζεται στατική ροπή της επιφάνειας ως προς τον άξονα x (ή y), εκφράζει το αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών F_i επί τις αποστάσεις αυτών y_i (ή x_i) από τον άξονα x (ή y) αντίστοιχα.

Πρακτικά, αν η δοσμένη επιφάνεια είναι δυνατό να διαιρεθεί σε γεωμετρικά σχήματα, στα οποία το κεντροειδές και το εμβαδόν είναι εύκολα προσδιορίσιμα, μετά τη διαίρεση αυτή, εργαζόμαστε ως εξής:

Τοποθετούμε στην επιφάνεια ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων Ox και Oy και υπολογίζουμε ως προς καθένα από αυτούς τις στατικές ροπές κάθε γεωμετρικού σχήματος.

Για ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα, η στατική του ροπή ως προς ένα άξονα είναι το γινόμενο του εμβαδού του επί την απόσταση του κεντροειδούς του από τον άξονα. Το γινόμενο αυτό είναι θετικό ή αρνητικό, αν η παραπάνω απόσταση είναι αντίστοιχα θετική ή αρνητική.

Στη συνέχεια, το αλγεβρικό άθροισμα των στατικών ροπών από τα επί μέρους γεωμετρικά σχήματα ως προς ένα από τους άξονες, αν διαιρεθεί δια της συνολικής τους επιφάνειας, μας δίνει την απόσταση του κεντροειδούς της συνολικής επιφάνειας από τον παραπάνω αναφερόμενο άξονα.

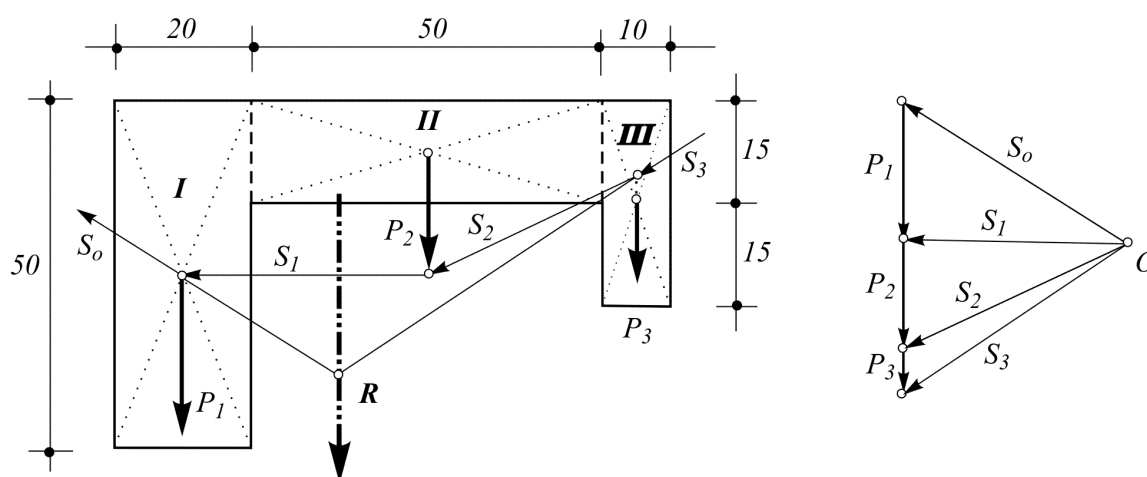
Η όλη εργασία μεθοδεύεται σε πίνακα που παρουσιάζεται στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί.

Παρατηρήσεις

1. Αν η επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το κεντροειδές της βρίσκεται πάνω στον άξονα.
2. Αν η επιφάνεια έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κεντροειδές της βρίσκεται στην τομή τους.
3. Κάθε τρύπα ή άνοιγμα στην επιφάνεια, εφόσον έχει ληφθεί υπόψη η εμπεριέχουσα το άνοιγμα επιφάνεια, λαμβάνεται, για τον υπολογισμό της στατικής ροπής (αναλυτικά) ή για την ένταση της δύναμης (γραφικά), με **αρνητικό** πρόσημο.

4.2 – Παράδειγμα

Της επιφάνειας που εικονίζεται στο σχήμα (διαστάσεις σε cm), να προσδιοριστεί το κεντροειδές της γραφικά και αναλυτικά.



Σχ. 4_2 Γραφικός προσδιορισμός κεντροειδούς επιφάνειας

Λύση**α) Γραφικά**

Μετά το χωρισμό της επιφάνειας στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα I, II και III με γνωστά τα κεντροειδή, υπολογίζουμε τα εμβαδά τους, που αποτελούν ταυτόχρονα τις εντάσεις των αντιστοίχων δυνάμεων που εφαρμόζονται στα κεντροειδή των.

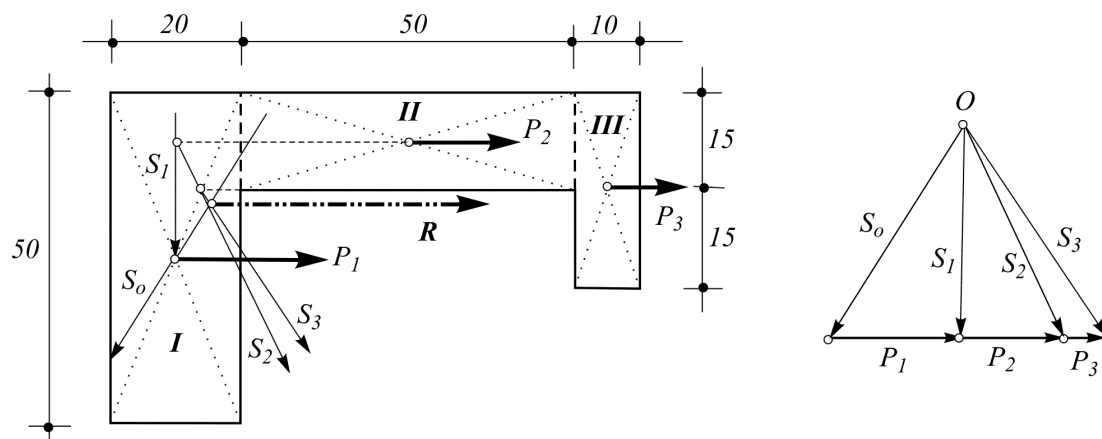
$$P_1 = 50 \cdot 20 = 1.000 \text{ cm}^2$$

$$P_2 = 50 \cdot 15 = 750 \text{ cm}^2$$

$$P_3 = 10 \cdot 30 = 300 \text{ cm}^2$$

Με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και σχοινοπολυγώνου, προσδιορίζουμε κατά το γνωστό τρόπο, το φορέα της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών.

Στη συνέχεια, αλλάζοντας διεύθυνση των δυνάμεων, προσδιορίζουμε ξανά τη συνισταμένη τους.



Σχ. 4_3 Γραφικός προσδιορισμός κεντροειδούς επιφάνειας (συνέχεια)

Η τομή των φορέων των δύο συνισταμένων, προσδιορίζει το σημείο K του κεντροειδούς στην επιφάνεια που δόθηκε.

β) Αναλυτικά

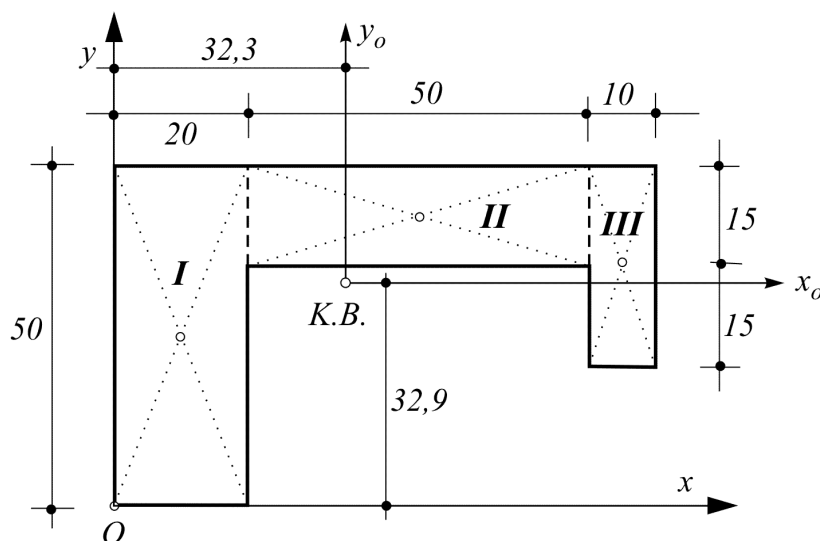
Μετά το χωρισμό της επιφάνειας στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα I, II και III όπως και στη γραφική μέθοδο, εγκαθιστούμε στην επιφάνεια το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy και υπολογίζουμε ως προς καθένα από αυτούς τις στατικές ροπές των επί μέρους επιφανειών. Έτσι θα έχουμε:

$$S_y = \sum (F_i x_i) = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3$$

$$S_x = \sum (F_i y_i) = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3$$

$$F = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3.$$

Τα παραπάνω αθροίσματα μπορούμε να υπολογίσουμε με μια απλή και οργανωμένη διαδικασία στον πίνακα που ακολουθεί.



Σχ. 4_4 Αναλυτικός προσδιορισμός κεντροειδούς της ίδιας επιφάνειας

α/α Επιφάνεια	x_i (cm)	y_i (cm)	F_i (cm ²)	$F_i x_i$ (cm ³)	$F_i y_i$ (cm ³)
I	10	25	1.000	10.000	25.000
II	45	42,5	750	33.750	31.875
III	75	35	300	22.500	10.500
Σ Υ Ν Ο Λ Α			2.050	66.250	67.375
			$F = \Sigma F_i$	$S_y = \Sigma (F_i x_i)$	$S_x = \Sigma (F_i y_i)$

Έτσι οι συντεταγμένες του κεντροειδούς ως προς τους άξονες x και y είναι:

$$x_o = \frac{S_y}{F} = \frac{\Sigma (F_i \cdot x_i)}{\Sigma F_i} = \frac{66.250}{2.050} = 32,3 \text{ cm}$$

$$y_o = \frac{S_x}{F} = \frac{\Sigma (F_i \cdot y_i)}{\Sigma F_i} = \frac{67.375}{2.050} = 32,9 \text{ cm}$$

Σημείωση

Μετά τον εντοπισμό του κεντροειδούς είτε με τη γραφική είτε με την αναλυτική μέθοδο, είναι φρόνιμο να ακολουθεί μια προσεκτική ματιά σαν έλεγχος, για την αποφυγή τυχόν χονδροειδούς σφάλματος.

4.3 – Θεωρήματα των Πάππου – Guldin

Οι Πάππος και Guldin* διατύπωσαν δύο χρησιμότερα θεωρήματα για τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων που προκύπτουν από σώματα εκ περιστροφής.

Βέβαια για να μπορούν τα θεωρήματα αυτά να χρησιμοποιηθούν θα πρέπει να γνωρίζουμε τη θέση του κεντροειδούς για:

- α) τη γραμμή που παράγει την επιφάνεια
- β) την επιφάνεια που παράγει τον όγκο

ως προς τον άξονα περιστροφής.

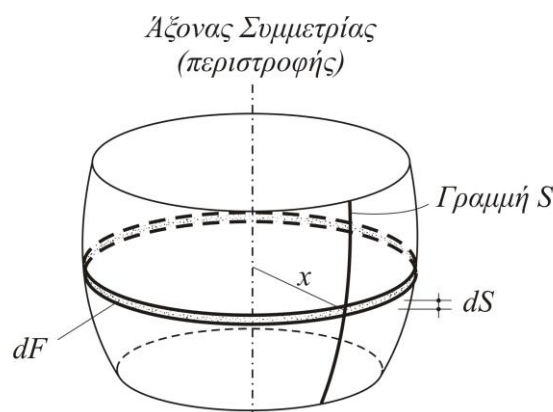
4.3.1 – Πρώτο θεώρημα

Το εμβαδόν F της επιφάνειας εκ περιστροφής, που παράγεται όταν επίπεδη καμπύλη περιστρέφεται γύρω από άξονα που κείται στο επίπεδό της χωρίς να την τέμνει, ισούται προς το γινόμενο του μήκους της καμπύλης επί το μήκος του τόξου, που διαγράφει το κεντροειδές κατά την περιστροφή του. Δηλαδή:

$$F = \varphi \cdot S \cdot x_0 \quad \text{για μερική περιστροφή γωνίας } \varphi \text{ (rad)}$$

$$F = 2\pi \cdot S \cdot x_0 \quad \text{για ολική περιστροφή.}$$

Για την απόδειξη των σχέσεων αυτών θεωρούμε ότι η επιφάνεια που προκύπτει από την επίπεδη καμπύλη, τη γενέτειρα όπως ονομάζεται, γύρω από τον ομοεπίπεδο άξονά της, οφείλεται στο άθροισμα των απειροστών δακτυλίων που δημιουργούνται κατά την περιστροφή των αντιστοίχων απειροστών τμημάτων μήκους dS της γενέτειρας.



Σχ. 4_5 Τυπική απεικόνιση εφαρμογής του 1ου θεωρήματος

* **Πάππος:** Αλεξανδρινός Μαθηματικός και Γεωμέτρης που έζησε την εποχή του Διοκλητιανού (310 - 370 μ.Χ).

Guldin: Ελβετός Μαθηματικός (1577 - 1643).

Αν λοιπόν dF είναι η επιφάνεια ενός τέτοιου απειροστού δακτυλίου που δημιουργείται από απειροστό τμήμα της γενέτειρας μήκους dS το οποίο απέχει απόσταση x από τον άξονα, τότε θα είναι:

$$dF = 2\pi \cdot x \cdot dS.$$

Συνεπώς, η συνολική επιφάνεια, που θα προκύψει σαν ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης σε όλο το μήκος S της γενέτειρας, θα είναι:

$$F = \int_S dF = \int_S 2\pi x dS = 2\pi \int_S x dS .$$

Το ολοκλήρωμα $\int_S x dS$, σε πλήρη αντιστοιχία με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 4.2 για τη στατική ροπή επιφάνειας, εκφράζει τη στατική ροπή της γραμμής S ως προς τον άξονα x , η οποία και εδώ ισούται αντίστοιχα με το γινόμενο του μήκους S της γενέτειρας επί την απόσταση x_0 του κεντροειδούς της γραμμής από τον άξονα. Δηλαδή:

$$\int_S x dS = x_0 \cdot S$$

Άρα η συνολική επιφάνεια που δημιουργείται κατά την περιστροφή, είναι:

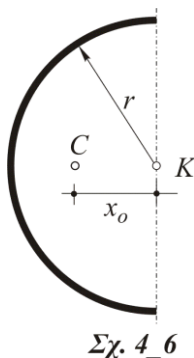
$$F = 2\pi \cdot x_0 \cdot S .$$

4.3.1.1 – Παραδείγματα

- 1** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας σφαίρας, την οποία επιφάνεια δημιουργεί η περιστροφή μιας ημιπεριφέρειας του παρακάτω σχήματος 4_6 γύρω από τη διάμετρό της.

Λύση

Όπως προκύπτει από τον πίνακα κεντροειδών μη ευθυγράμμων σχημάτων που βρίσκεται στο τέλος αυτής της ενότητας, το κεντροειδές μιας ημιπεριφέρειας βρίσκεται σε απόσταση



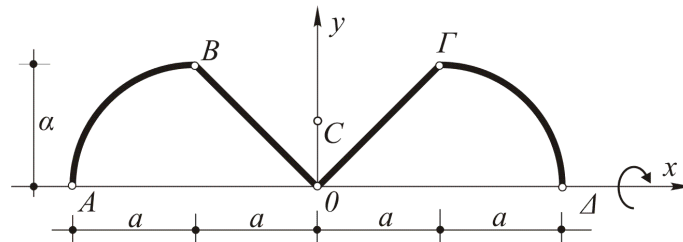
$x_0 = 2r/\pi$ από τη διάμετρό της.

Συνεπώς κατά το πρώτο Θεώρημα των Πάππου - Guldin το εμβαδόν της σφαίρας είναι:

$$F = 2\pi \cdot x_o S = 2\pi \frac{2r}{\pi} \pi r = 4\pi r^2.$$

2

Χρησιμοποιώντας το πρώτο Θεώρημα των Πάππου - Guldin, να προσδιοριστεί το κεντροειδές του σύρματος που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχ. 4_7

Λύση

Αν C είναι το κεντροειδές του σύρματος, τότε, λόγω συμμετρίας, θα βρίσκεται πάνω στον άξονα y.

Κατά το πρώτο Θεώρημα των Πάππου - Guldin, θα είναι:

$$F = 2\pi \cdot y_c \cdot S,$$

όπου S είναι το μήκος του σύρματος, που είναι:

$$S = 2 \cdot (AB + BO) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \pi a + a\sqrt{2} \right)$$

και F η συνολική επιφάνεια που παράγει το σύρμα κατά την περιστροφή του, η οποία προφανώς ισούται με το διπλάσιο ενός ημισφαιρίου και ενός κώνου. Δηλαδή:

$$F = 2 \left(2\pi a^2 + \frac{1}{2} 2\pi a \cdot a\sqrt{2} \right) = 2\pi a^2 (2 + \sqrt{2}).$$

Θέτοντας ήδη τις τιμές των S και F στην πρώτη εξίσωση, βρίσκουμε την απόσταση του κεντροειδούς από τον άξονα περιστροφής, που είναι:

$$y_c = \frac{F}{2\pi \cdot S} = \frac{2\pi \cdot a^2 (2 + \sqrt{2})}{2\pi \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \pi a + a\sqrt{2} \right)} = \frac{a(2 + \sqrt{2})}{\pi + 2\sqrt{2}}.$$

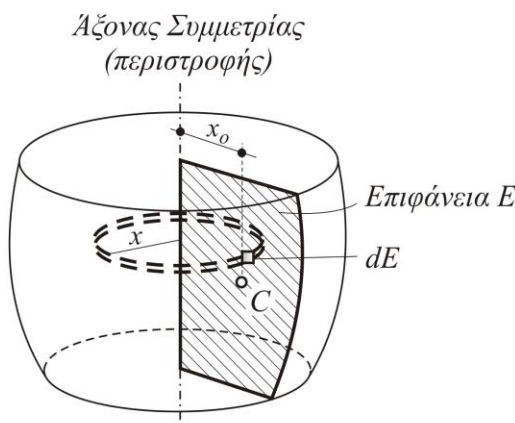
4.3.2 Δεύτερο Θεώρημα

Ο όγκος V του στερεού που παράγεται όταν επίπεδη επιφάνεια E περιστρέφεται γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό της αλλά δεν την

τέμνει, ισούται προς το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί το μήκος του τόξου (δρόμο) που διαγράφει κατά την περιστροφή το κεντροειδές C της επιφάνειας E . Δηλαδή:

$$V = \varphi \cdot x_o \cdot E \quad \text{για μερική περιστροφή γωνίας } \varphi \text{ (rad)}$$

$$V = \varphi \cdot 2\pi \cdot x_o \cdot E \quad \text{για ολική περιστροφή.}$$



Σχ. 4_8 Τυπική απεικόνιση εφαρμογής του 2ου θεωρήματος

Πραγματικά, αν dE είναι το εμβαδόν απειροστής επιφάνειας της E , τότε, κατά την περιστροφή, ο απειροστός όγκος dV του δακτυλίου (σαμπρέλας) που δημιουργείται είναι:

$$dV = 2\pi \cdot x \cdot dE,$$

όπου x η απόσταση του κεντροειδούς της dE από τον άξονα.

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης, εκτεινόμενο σε όλη την επιφάνεια E , δίνει το συνολικό όγκο του στερεού. Δηλαδή:

$$V = \int_E dV = \int_E 2\pi x dE = 2\pi \int_E x dE$$

Επειδή όμως το $\int_E x dE$ εκφράζει τη στατική ροπή της E ως προς τον άξονα, η οποία, ως γνωστόν είναι $x_o E$, θα έχουμε τελικά

$$V = 2\pi \cdot x_o E.$$

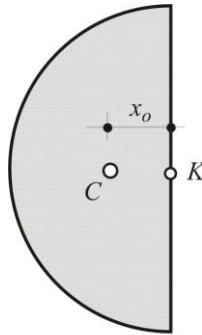
4.3.2.1 – Παραδείγματα

1

Να υπολογιστεί ο όγκος της σφαίρας που δημιουργείται όταν το ημικύκλιο του παρακάτω σχήματος, 4_9, περιστρέφεται γύρω από τη διάμετρό του.

Λύση

Από τον πίνακα κεντροειδών στο τέλος της ενότητας προκύπτει ότι το κεντροειδές ενός ημικυκλίου, (περίπτωση κυκλικού τμήματος με $\alpha = \pi/2$), βρίσκεται σε απόσταση



Σχ. 4_9

$$x_o = 2r \cdot \eta_{μα} / 3\alpha = 4r / 3\pi$$

από τη διάμετρό του. Επομένως, κατά το δεύτερο Θεώρημα των Πάππου - Guldin θα έχουμε ότι

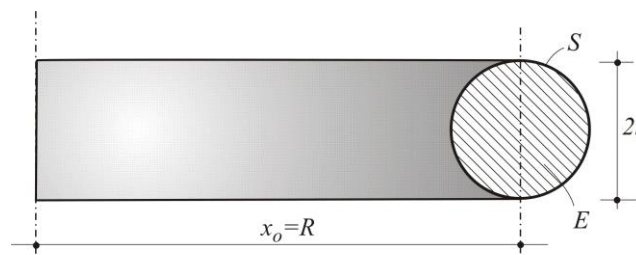
$$V = 2\pi x_o E = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3 ,$$

που είναι ο γνωστός τύπος της Στερεομετρίας για τον όγκο της σφαίρας.

- 2** Να υπολογιστούν η επιφάνεια και ο όγκος σαμπρέλας ποδηλάτου του παρακάτω σχήματος, 4_10, ακτίνων R και r.

Λύση

Η επιφάνεια θα προκύψει από το πρώτο Θεώρημα των Πάππου - Guldin, και θα είναι



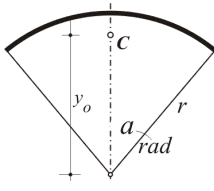
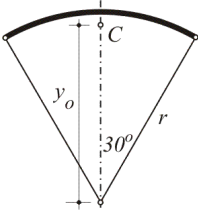
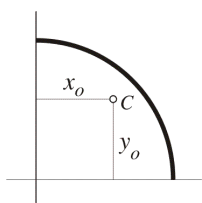
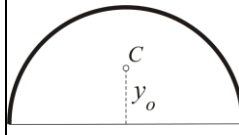
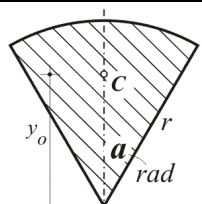
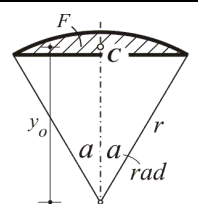
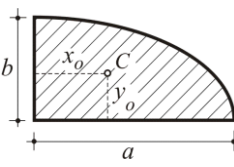
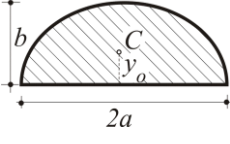
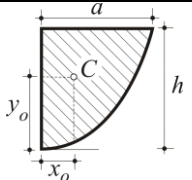
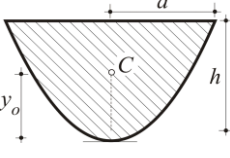
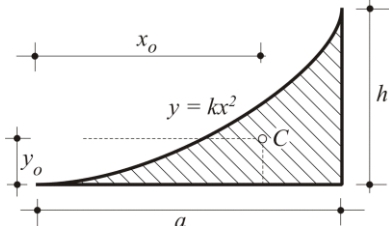
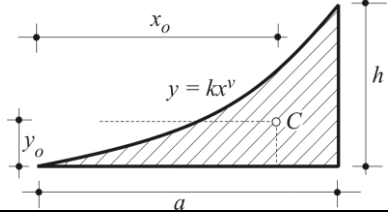
Σχ. 4_10

$$F = 2\pi x_o \cdot S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr .$$

Όμοια, κατά το δεύτερο Θεώρημα των Πάππου - Guldin θα προκύψει ο όγκος της

$$V = 2\pi x_o E = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R .$$

Πίνακας κεντροειδών μη ευθυγράμμων τμημάτων

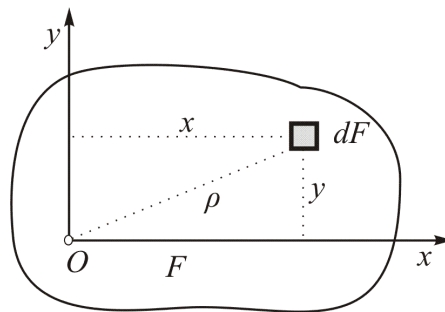
Ονομασία	Σ χ ή μ α	x_o	y_o	Εμβαδό
Κυκλικό τόξο		-	$\frac{r \eta \mu \alpha}{\alpha}$	-
Εκτοπεριφέρεια		-	$\frac{3r}{\pi}$	-
Τεταρτοπερ/α		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	-
Ημιπεριφέρεια		-	$\frac{2r}{\pi}$	-
Κυκλικό τμήμα		-	$\frac{2r \eta \mu \alpha}{3\alpha}$	ar^2
Κυκλικός όνυχας		-	$\frac{2r}{3} \left(\frac{\eta \mu^3 \alpha}{\alpha - \eta \mu \alpha \sigma \nu \alpha} \right)$	$r^2(a - \eta \mu \alpha \sigma \nu \alpha)$
Τεταρτέλλειψη		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Ημιέλλειψη		-	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Ημιπαραβολή		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Παραβολή		-	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Παραβολικό Χωρίο		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Παράβολη 'ν' βαθμού		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$

Κεφάλαιο 5°

Ροπές αδράνειας

Σε υπολογισμούς τεχνικών εφαρμογών εμφανίζονται πολλές φορές στην πράξη μαθηματικές εκφράσεις της μορφής:

$$\int_F x^2 dF, \quad \int_F y^2 dF, \quad \int_F \rho^2 dF, \quad \int_F xy dF$$



Σχ. 5_1 Τυπική μορφή επιφάνειας

όπου είναι:

- F τυχούσα επίπεδη επιφάνεια ως προς σύστημα αναφοράς xOy ,
- dF απειροστό στοιχείο της επιφάνειας, του οποίου το κεντροειδές απέχει απόσταση:

x από τον άξονα y

y από τον άξονα x

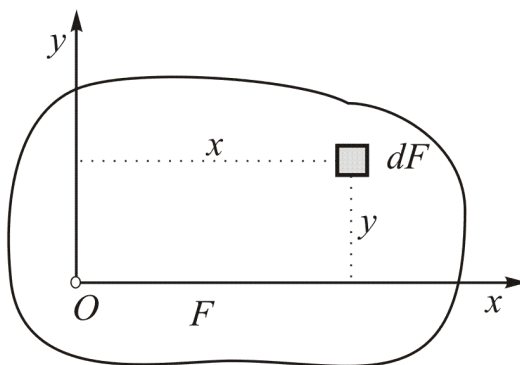
ρ από την αρχή των συντεταγμένων.

Οι παραπάνω εκφράσεις αποτελούν ξεχωριστές περιπτώσεις ενός γενικότερου μεγέθους που αναφέρεται στη δοσμένη επιφάνεια (ή μάζα) και ονομάζεται ροπή αδράνειας.

Στις επόμενες ενότητες αναπτύσσονται χωριστά οι παραπάνω περιπτώσεις, με μεγαλύτερη βαρύτητα στις δύο πρώτες, που άλλωστε παρουσιάζονται πιο συχνά.

5.1 – Ροπή αδράνειας ως προς άξονα

Έστω επίπεδη επιφάνεια F και σύστημα συντεταγμένων xOy που βρίσκεται στο επίπεδό της.



Σχ. 5_2 Τυπική επιφάνεια και σύστημα συντεταγμένων

Αν dF είναι απειροστό στοιχείο της επιφάνειας και x, y οι συντεταγμένες του κεντροειδούς του, τότε θα ονομάζουμε ροπή αδράνειας του στοιχείου αυτού ως προς τον άξονα x , το γινόμενο της απειροστής επιφάνειας dF επί το τετράγωνο της απόστασής του από τον άξονα x .

Το ολοκλήρωμα αυτών των στοιχειωδών ποσοτήτων αν εκταθεί σε ολόκληρη την επιφάνεια F , δηλαδή η ποσότητα

$$J_x = \int_F y^2 dF ,$$

ονομάζεται **ροπή αδράνειας της επιφάνειας F ως προς τον άξονα x** .

Εντελώς ανάλογα θα ονομάζουμε ροπή αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς τον άξονα y την ποσότητα

$$J_y = \int_F x^2 dF .$$

Όπως προκύπτει από τον ορισμό της, η ροπή αδράνειας εκφράζεται σε μήκος⁴, σαν γινόμενο επιφάνειας επί το τετράγωνο απόστασης.

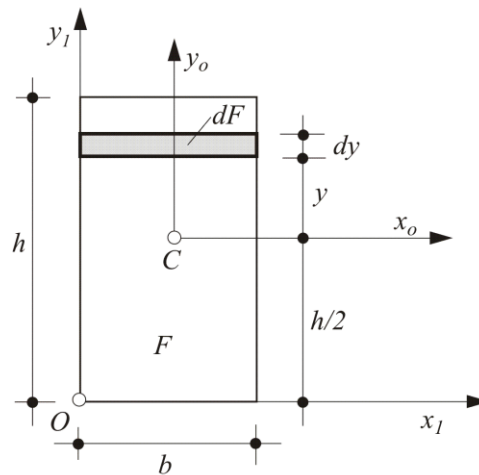
Επειδή τόσο η επιφάνεια κάθε σχήματος όσο και το τετράγωνο οποιασδήποτε απόστασης είναι θετικοί αριθμοί, έπεται ότι η ροπή αδράνειας κάθε σχήματος ως προς οποιονδήποτε άξονα είναι πάντα **θετική** ποσότητα.

5.1.1 – Ροπή αδράνειας ορθογωνίου παραλ/μου

Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός ορθογωνίου, σχ 5_3, ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει από το κεντροειδές του, διαιρούμε το ορθογώνιο σε απειροστές οριζόντιες λωρίδες με εμβαδόν $dF = b \cdot dy$.

Αν y είναι η απόσταση του κεντροειδούς μιας τέτοιας λωρίδας από τον άξονα x_o , τότε θα είναι:

$$J_{x_o} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{12}$$



Σχ. 5_3

Με ανάλογες σκέψεις η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς άξονα τη **βάση** του, θα είναι:

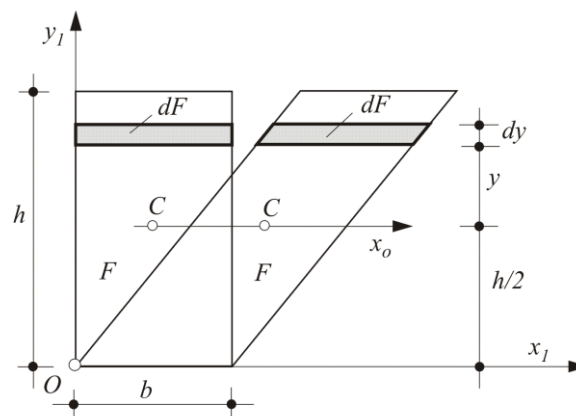
$$J_{x_1} = \int_0^h y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

Για τους κατακόρυφους άξονες y_0 και y_1 θα έχουμε αντίστοιχα:

$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{12} \quad \text{και} \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}$$

5.1.2 – Ροπή αδράνειας παραλληλογράμμου

Οι σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για τον προσδιορισμό της ροπής αδράνειας γενικά ενός παραλληλογράμμου, βλ. σχ. 5_4, ως προς τον αντίστοιχο άξονα, αρκεί αυτός (ο άξονας), να είναι **παράλληλος** προς μια πλευρά του παραλληλογράμμου.



Σχ. 5_4

Πραγματικά, αν ληφθεί υπόψη ότι ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να προκύψει από αντίστοιχο ορθογώνιο ίσων διαστάσεων, αν η επάνω βάση του μετατεθεί οριζόντια, τότε τα εμβαδά των στοιχείων του και οι αποστάσεις των κεντροειδών τους από τον άξονα x παραμένουν τα ίδια.

Έτσι η ροπή αδράνειας του παρ/μου παραμένει η ίδια όπως και του ορθογωνίου. Δηλαδή:

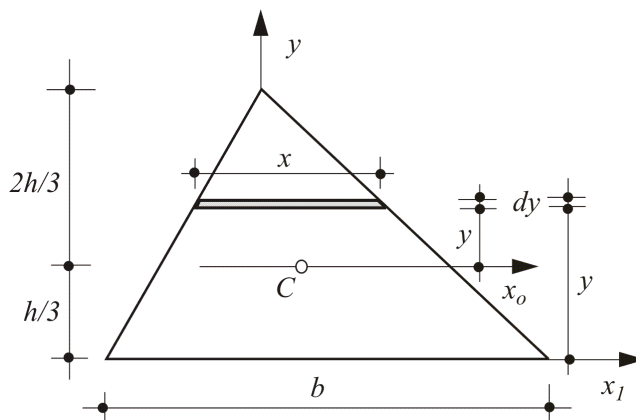
$$J_{x_o} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{και} \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}.$$

5.1.3 – Ροπή αδράνειας τριγώνου

Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός τριγώνου ως προς τον άξονα x_1 , που ταυτίζεται με τη βάση του, θεωρούμε, βλ. σχ. 5_5, μια λωρίδα της επιφάνειας παράλληλη προς τον άξονα, σε απόσταση y από αυτόν.

Αν x είναι το μήκος της λωρίδας, θα είναι $dF = x \cdot dy$ και:

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y).$$



Σχ. 5_5

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_0^h y^2 dF = \int_0^h y^2 x dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy = \\ &= \frac{b}{h} \left[h \left(\frac{y^3}{3} \right) - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

Αν ως άξονας θεωρηθεί ο **κεντροβαρικός** που είναι παράλληλος προς τη βάση, θα είναι αντίστοιχα, $dF = x \cdot dy$ και:

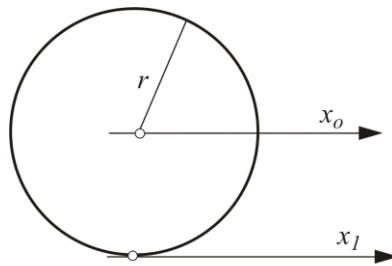
$$\frac{x}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right), \text{ οπότε:}$$

$$J_{x_o} = \int_{\frac{2h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dF = \int_{\frac{2h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy = \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{3} \left(\frac{y^3}{3} \right) - \frac{y^4}{4} \right]_{\frac{2h}{3}}^{\frac{2h}{3}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{3} \cdot \frac{8h^3}{81} - \frac{16h^4}{4 \cdot 81} - \left(-\frac{2h}{3} \cdot \frac{h^3}{81} - \frac{1}{4} \cdot \frac{h^4}{81} \right) \right] = \\
&= \frac{bh^4}{h \cdot 81} \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{bh^3}{81} \cdot \frac{27}{12} = \frac{bh^3}{36}.
\end{aligned}$$

5.1.4 – Ροπή αδράνειας κύκλου

Οι σχέσεις που δίνουν τη ροπή αδράνειας ενός κύκλου, βλ. σχ. 5_6, ως προς άξονα τη **διάμετρο** ή την **εφαπτομένη** του είναι αντίστοιχα:



Σχ. 5_6

$$J_{x_o} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad \text{και} \quad J_{x_l} = \frac{5\pi \cdot r^4}{4}$$

5.2 – Ακτίνα αδράνειας

Είναι γνωστό ότι η ροπή αδράνειας έχει διαστάσεις L^4 , όπου L η διάσταση του μήκους.

Αν διαιρέσουμε τη ροπή αδράνειας J μιας επιφάνειας ως προς άξονα, δια του εμβαδού της F , θα πάρουμε σε διάσταση L^2 , δηλαδή το τετράγωνο κάποιου **μήκους**.

Το μήκος αυτό ονομάζεται ακτίνα αδράνειας της επιφάνειας ως προς το θεωρούμενο άξονα και είναι εξ' ορισμού η θετική τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον υπόψη άξονα, δια του εμβαδού της. Δηλαδή:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} \quad \text{και} \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

Για ένα ορθογώνιο π.χ. με βάση b και ύψος h , θα είναι:

$$i_{x_o}^2 = \frac{\frac{bh^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12} \quad \text{και} \quad i_{y_o}^2 = \frac{\frac{hb^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{b^2}{12}$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad i_{x_o} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad \text{και} \quad i_{y_o} = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Η ακτίνα αδράνειας εκφράζει την απόσταση ενός σημείου ή μιας λωρίδας απειροστού πάχους, παράλληλης του άξονα, όπου θεωρείται **συμπυκνωμένη** όλη η επιφάνεια του σχήματος, ώστε να έχει την ίδια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα.

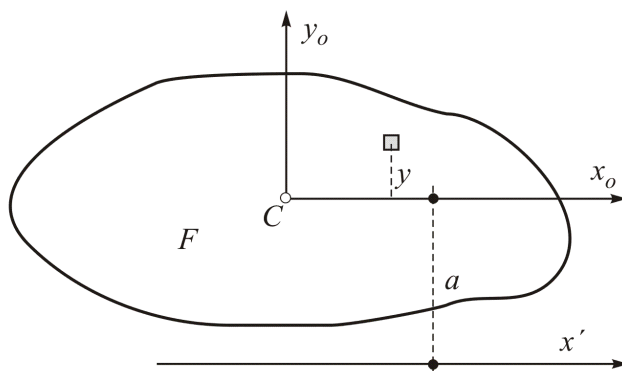
5.3 – Θεώρημα του παράλληλου άξονα (Steiner)

Αν η ροπή αδράνειας J_{x_0} μιας επίπεδης επιφάνειας F ως προς κεντροβαρικό άξονα x_0 είναι γνωστή, τότε η ροπή αδράνειας $J_{x'}$ της ίδιας επιφάνειας ως προς άξονα x' παράλληλο του x_0 σε απόσταση a , μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση:

$$J_{x'} = J_{x_0} + F \cdot a^2 ,$$

που εκφράζει το παρακάτω θεώρημα του **Steiner**:

Η ροπή αδράνειας ενός επίπεδου σχήματος ως προς τυχαίο άξονα είναι ίση με τη ροπή αδράνειας του σχήματος ως προς τον κεντροβαρικό του άξονα που είναι παράλληλος του πρώτου, αυξημένη κατά το γινόμενο του εμβαδού του σχήματος επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.



Σχ. 5_7 Τυπική επιφάνεια για την εφαρμογή του θεωρήματος Steiner

Πραγματικά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι:

$$J_{x'} = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF .$$

Αλλ' όμως είναι $\int_F y dF = 0$, επειδή ο άξονας Cx_0 περνάει από το κεντροειδές της επιφάνειας του σχήματος. Άρα:

$$J_{x'} = J_{x_0} + F \cdot a^2 .$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αντίστροφα για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς κεντροβαρικό άξονα x_0 παράλληλο του x' , όταν είναι γνωστή η $J_{x'}$, δηλαδή:

$$J_{x_0} = J_{x'} - F \cdot a^2 .$$

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα, παίρνοντας πάντα **θετικές** τιμές, είναι η **μικρότερη** από όλες τις ροπές αδράνειας που προκύπτουν για την ίδια επιφάνεια ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο του παραπάνω κεντροβαρικού.

Λαμβάνοντας υπόψη την έννοια της ακτίνας αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς άξονα, μπορούμε, διαιρώντας τα μέλη των δύο προηγούμενων σχέσεων δια F , να εκφράσουμε το Θεώρημα του Steiner αντίστοιχα με τις σχέσεις:

$$i_{x'} = i_{x_0} + a \quad \text{ή} \quad i_{x_0} = i_{x'} - a$$

Η πρόσθεση ροπών αδράνειας διαφόρων επιφανειών είναι δυνατή **μόνον** όταν οι ροπές αδράνειας αναχθούν σε κοινό άξονα. Εδώ υπογραμμίζεται η μεγάλη συμβολή του Θεωρήματος Steiner.

5.4 – Παραδείγματα

1

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Steiner, να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας:

- α) Ορθογωνίου, ως προς άξονα τη βάση του
- β) Τριγώνου, ως προς τον κεντροβαρικό του άξονα παράλληλο της βάσης του, και
- γ) Κύκλου, ως προς άξονα την εφαπτομένη του.

Λύση

α) Ορθογωνίου

Από το σχήμα της ενότητας 5.1.1, έχουμε:

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{και} \quad a = \frac{h}{2}.$$

Έτσι, από το Θεώρημα του Steiner, προκύπτει:

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

β) Τριγώνου

Όμοια, από το σχήμα της ενότητας 5.1.3, έχουμε:

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{και} \quad a = \frac{h}{3}. \quad \text{Άρα:}$$

$$J_{x_0} = J_{x_1} - Fa^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}.$$

γ) Κύκλου

Επειδή $J_{x_o} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ και $a = r$, θα είναι:

$$J_{x_1} = J_{x_o} + F \cdot a^2 = \frac{\pi \cdot r^4}{4} + \pi r^2 \cdot r^2 = \frac{5\pi \cdot r^4}{4}.$$

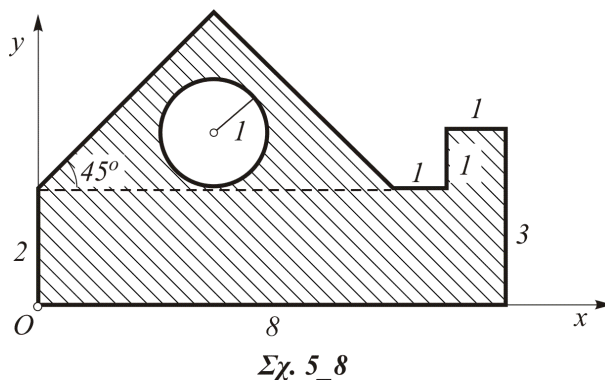
2

Της σκιαγραμμισμένης επιφάνειας του παρακάτω σχήματος, 5_8, (διαστάσεις σε cm), να υπολογιστούν:

α) Οι ροπές αδράνειας J_x και J_y ως προς τους άξονες x , y

β) Οι ροπές αδράνειας J_{x_o} και J_{y_o} ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες x_o και y_o , που είναι παράλληλοι αντίστοιχα προς τους x και y .

γ) Οι ακτίνες αδράνειας i_x , i_y , i_{x_o} και i_{y_o} .

Λύση

α) Χωρίζουμε τη δοσμένη επιφάνεια σε επί μέρους γεωμετρικά σχήματα των οποίων γνωρίζουμε τα κεντροειδή.

Η τριγωνική επιφάνεια, που για λόγους σκοπιμότητας χωρίστηκε στην I' και II' , θεωρείται **πλήρης**, οπότε η επιφάνεια του κύκλου λαμβάνεται **αρνητική**, ώστε να δημιουργηθεί τελικά το κενό της τρύπας.

Ύστερα από αυτά, θα έχουμε:

$$J_x = J_{(I',II')} - J_{II_x} + J_{III_x} + J_{IV_x}$$

Οι ροπές αδράνειας των αντιστοίχων επί μέρους επιφανειών, είναι:

$$J_{(I',II')} = \frac{6 \cdot 3^3}{36} + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 3^2 = 85,5 \text{ cm}^4,$$

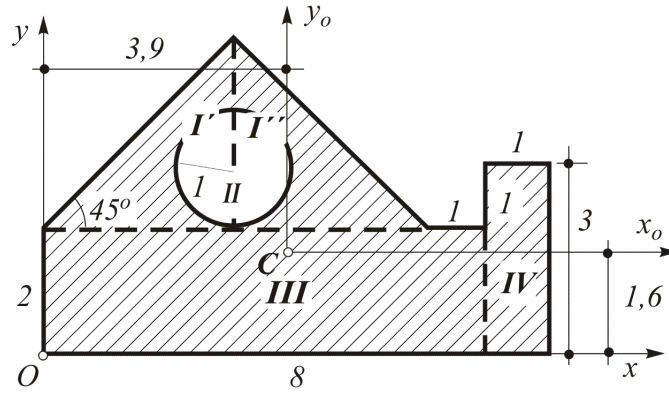
$$J_{II_x} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot 3^2 = 29,06 \text{ cm}^4,$$

$$J_{III_x} = \frac{7 \cdot 2^3}{3} = 18,67 \text{ cm}^4,$$

$$J_{IV_x} = \frac{1 \cdot 3^3}{3} = 9 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Άρα: } J_x = 85,5 - 29,06 + 18,67 + 9 = \underline{84,11 \text{ cm}^4}.$$

Για τον άξονα y , την τριγωνική επιφάνεια I, τη χωρίζουμε σε δύο επί μέρους τριγωνικές επιφάνειες, βλ. σχ. 5_9, έτσι ώστε η κάθε μια να έχει μια πλευρά παράλληλη προς τον άξονα y . Τότε, αντίστοιχα είναι:



Σχ. 5_9

$$J_y = J_{I'y} + J_{I''y} - J_{IIy} + J_{IIIy} + J_{IVy}.$$

Όμως είναι:

$$J_{I'y} = \frac{3 \cdot 3^3}{36} + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 2^2 = 20,25 \text{ cm}^4,$$

$$J_{I''y} = \frac{3 \cdot 3^3}{36} + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4^2 = 74,25 \text{ cm}^4,$$

$$J_{IIy} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot 3^2 = 29,06 \text{ cm}^4,$$

$$J_{IIIy} = \frac{2 \cdot 7^3}{3} = 228,67 \text{ cm}^4,$$

$$J_{IVy} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 7,5^2 = 169 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Άρα: } J_y = 20,25 + 74,25 - 29,06 + 228,67 + 169 = 463,11 \text{ cm}^4.$$

β) Για να υπολογίσουμε τις ροπές αδράνειας της επιφάνειας ως προς τους κεντροβαρικούς της άξονες, προσδιορίζουμε πρώτα τις συντεταγμένες x_k και y_k του κεντροειδούς της C.

α/α Επιφάνεια	x_i cm	y_i cm	F_i cm ²	$F_i x_i$ cm ³	$F_i y_i$ cm ³
I' + I''	3	3	9	27	27
II	3	3	-3,14	-9,42	-9,42
III	3,5	1	14	49	14
IV	7,5	1,5	3	22,5	4,5
Σ Υ Ν Ο Λ Α			22,86	89,08	36,08

$$\text{Άρα: } x_K = \frac{\Sigma(F_i x_i)}{\Sigma F_i} = \frac{89,08}{22,86} = 3,9 \text{ cm},$$

$$y_K = \frac{\Sigma(F_i y_i)}{\Sigma F_i} = \frac{36,08}{22,86} = 1,58 \text{ cm}.$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια το θεώρημα Steiner για όλη την επιφάνεια, υπολογίζουμε τις J_{x_0} , J_{y_0} .

$$J_{x_0} = J_x - F y_K^2 = 84,11 - 22,86 \cdot 1,58^2 = \underline{27,04 \text{ cm}^4}$$

$$J_{y_0} = J_y - F x_K^2 = 463,11 - 22,86 \cdot 3,9^2 = \underline{115,41 \text{ cm}^4}$$

γ) Οι ακτίνες αδράνειας προκύπτουν, βάσει ορισμού, από τις αντίστοιχες ροπές αδράνειας και είναι:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{84,11}{22,86}} = 1,92 \text{ cm}$$

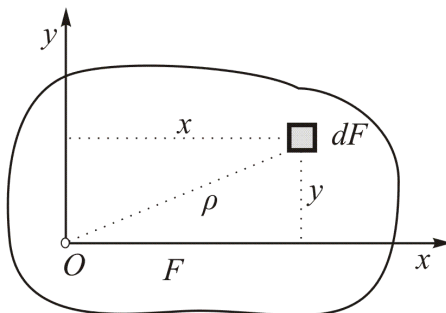
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{463,11}{22,86}} = 4,5 \text{ cm}$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{F}} = \sqrt{\frac{27,04}{22,86}} = 1,09 \text{ cm}$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{F}} = \sqrt{\frac{115,41}{22,86}} = 2,25 \text{ cm}.$$

5.5 – Πολική ροπή αδράνειας

Θεωρούμε την επίπεδη επιφάνεια F του σχήματος ως προς το σύστημα συντεταγμένων xOy . Θα ονομάζουμε **πολική ροπή** αδράνειας J_p της επιφάνειας F ως προς **πόλο** το σημείο O , το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών dF του σχήματος επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον πόλο.



Σχ. 5_10 Γενική επιφάνεια με σύστημα συντεταγμένων

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η πολική ροπή αδράνειας της επιφάνειας του σχήματος ως προς το σημείο O , είναι:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF ,$$

όπου κάθε εμβαδικό στοιχείο dF πολλαπλασιάζεται επί ρ^2 και η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλη την επιφάνεια του σχήματος. Είναι δηλαδή η πολική ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς πόλο, ταυτόσημη με τη ροπή αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς άξονα που είναι κάθετος της της επιφάνειας στο σημείο του πόλου.

Για την επιφάνεια του σχήματος είναι ήδη γνωστό, ότι:

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad \text{και} \quad J_y = \int_F x^2 dF$$

$$\text{Άρα: } J_x + J_y = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p . \quad (\alpha)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η πολική ροπή αδράνειας επιφάνειας ως προς τυχόν σημείο O ισούται προς το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς δύο κάθετους άξονες που κείνται στην επιφάνεια και τέμνονται στο O .

Η πρόταση αυτή, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί, επιτρέπει τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός κύκλου ως προς άξονα μια διάμετρό του, σχέση που ήδη χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα 5.1.4.

5.5.1 – Παράδειγμα

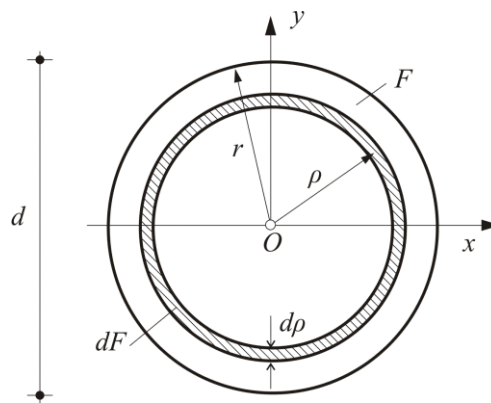
Να υπολογιστούν:

α) Η πολική ροπή αδράνειας του κύκλου του παρακάτω σχήματος, ακτίνας r , ως προς πόλο το κέντρο του και

β) Η ροπή αδράνειας αυτού, ως προς άξονα τη διάμετρό του.

Λύση

α) Διαιρούμε τον κύκλο σε στοιχειώδεις ομόκεντρους δακτυλίους dF με ακτίνα ρ και απειροστό πάχος $d\rho$, δηλαδή με εμβαδό $dF = 2\pi\rho d\rho$.



Σχ. 5_11

Τότε θα είναι:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

β) Λόγω συμμετρίας, είναι $J_x = J_y$.

Άρα από τη σχέση (α) της προηγούμενης ενότητας προκύπτει:

$$J_p = 2J_x = 2J_y, \quad \text{ή}$$

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

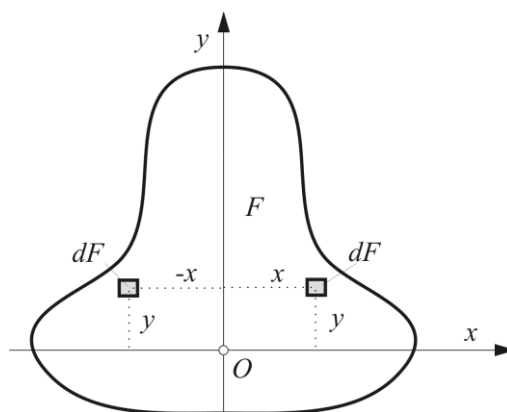
5.6 – Φυγόκεντρη ροπή αδράνειας

Αναφερόμενοι στο σχήμα της ενότητας 5.1, το ολοκλήρωμα

$$J_{xy} = \int_F xy dF,$$

όπου κάθε απειροστό στοιχείο dF της επιφάνειας πολλαπλασιάζεται επί το γινόμενο των συντεταγμένων του κεντροειδούς του, η δε ολοκλήρωση εκτείνεται σε ολόκληρη την επιφάνεια F του σχήματος καλείται **φυγόκεντρη ροπή αδράνειας** της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y .

Επειδή οι συντεταγμένες των διαφόρων απειροστών στοιχείων της επιφάνειας δεν είναι πάντα θετικοί αριθμοί, είναι φανερό ότι η φυγόκεντρη ροπή αδράνειας μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε **πραγματική** τιμή (θετική αρνητική ή μηδέν), που είναι συνάρτηση της θέσης και του προσανατολισμού των αξόνων ως προς την επιφάνεια.



Σχ. 5_12

Αν το σχήμα έχει έναν άξονα **συμμετρίας**, π.χ. τον άξονα y , σχ. 5_12, τότε η φυγόκεντρη ροπή του ως προς τους άξονες x, y είναι μηδέν.

Πραγματικά, σε κάθε στοιχείο dF με θετικό x , υπάρχει, λόγω συμμετρίας, ένα αντίστοιχο στοιχείο dF' με **αρνητικό** x και ίδιο y .

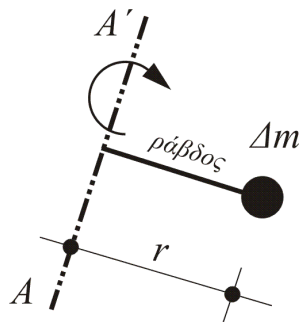
Επομένως τα αντίστοιχα στοιχειώδη γινόμενα $xy dF$ και $-xy dF$ εξαλείφονται αμοιβαία, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_F xy dF$, που ανάγεται σε

αλγεβρικό άθροισμα τέτοιων ζευγών, τελικά μηδενίζεται. Είναι προφανές ότι σε περίπτωση συμμετρίας του σχήματος ως προς κέντρο (δύο άξονες), θα είναι και πάλι $J_{xy} = 0$.

5.7 – Φυσική σημασία των ροπών αδράνειας

Όσα μέχρι στιγμής αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρονται σε ροπές αδράνειας **επιπέδων** σχημάτων.

Αν δεχθούμε την ύπαρξη αντιστοιχίας ανάμεσα στη στοιχειώδη επιφάνεια dF και τη στοιχειώδη μάζα Δm της ύλης, τότε μπορούμε να μιλάμε με την ίδια ορολογία και τις ίδιες σχέσεις για **ροπή αδράνειας μάζας**.



Σχ. 5_13 Τυπική διάταξη για τη φυσική σημασία των ροπών αδράνειας

Στο άκρο μιας ράβδου με αμελητέο βάρος, θεωρούμε στοιχειώδη μάζα Δm που μπορεί να περιστρέφεται σε απόσταση r γύρω από τον άξονα AA' . Αν στον άξονα του συστήματος που αρχικά ηρεμεί, εφαρμοστεί ζεύγος δυνάμεων, η ράβδος και η μάζα θ' αρχίσουν να περιστρέφονται γύρω από τον άξονα AA' .

Αποδεικνύεται στη Δυναμική ότι ο χρόνος, που απαιτείται για ν' αποκτήσει το σύστημα μια συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, είναι ανάλογος της μάζας Δm και του τετραγώνου της απόστασης r .

Επομένως το γινόμενο $r^2 \Delta m$ εκφράζει το μέτρο της αδράνειας του συστήματος δηλαδή την αντίσταση που προβάλλει όταν επιχειρούμε να το θέσουμε σε κίνηση από την κατάσταση ηρεμίας.

Για το λόγο αυτό το γινόμενο $r^2 \Delta m$ ονομάζεται **ροπή αδράνειας της μάζας Δm ως προς τον άξονα AA'** .

Η ακτίνα αδράνειας, όπως γνωρίσαμε και πριν, έχει διαστάσεις μήκους και η φυσική της σημασία είναι ότι παριστάνει την απόσταση που πρέπει να τοποθετηθεί η συνολική μάζα m του σώματος, θεωρούμενη σαν σημείο (ιδανική περίπτωση), ώστε να μη μεταβληθεί η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς το θεωρούμενο άξονα.

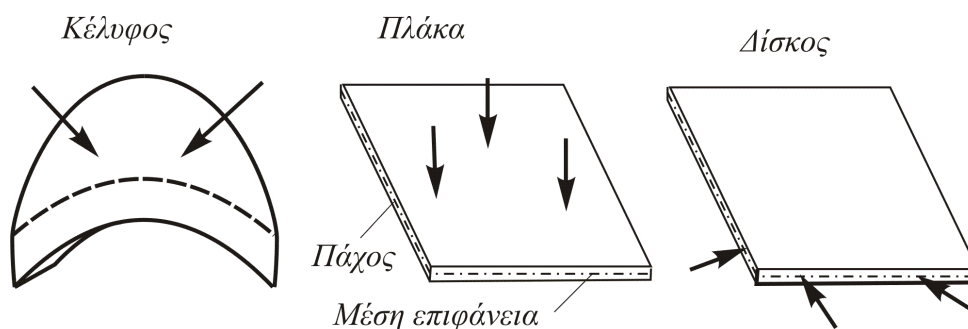
Κεφάλαιο 6°

Ισοστατικοί φορείς

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων.

Οι φορείς ανάλογα με τη μορφή τους διακρίνονται στους:

1. **Χωρικούς** που είναι σώματα τριών διαστάσεων και παραλαμβάνουν τυχούσες δυνάμεις στο χώρο.
2. **Επιφανειακούς** που είναι κατασκευές μικρού πάχους και αναπτύσσονται σε επιφάνεια που ονομάζεται **μέση**. Ανάλογα με τη μορφή της μέσης επιφάνειας, οι επιφανειακοί φορείς, διακρίνονται:



Σχ. 6_1 Τυπική μορφή επιφανειακών φορέων

2α. στους κελυφωτούς, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και δέχονται τυχούσες δυνάμεις.

2β. στους επίπεδους, οι οποίοι είναι σώματα σταθερού ή μεταβλητού, πάντως μικρού πάχους, και απλώνονται σε επίπεδη επιφάνεια. Αυτοί με τη σειρά τους διακρίνονται σε **δίσκους** και **πλάκες**, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι επίπεδη. Η διαφορά ανάμεσά τους βρίσκεται στα εξωτερικά φορτία, τα οποία:

- στους **δίσκους** κείνται στο επίπεδο του φορέα,
- στις **πλάκες** είναι κάθετα σ' αυτό (το επίπεδο).

3. Γραμμικούς που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε **επίπεδη** γραμμή που ονομάζεται

άξονας. Οι γραμμικοί φορείς, ανάλογα με τη μορφή του άξονά τους διακρίνονται στους:

- 3α. ευθύγραμμους** όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή
- 3β. τοξωτούς** όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο τόξο,
- 3γ. πλαισιωτούς** όταν ο άξονας είναι οποιαδήποτε **τεθλασμένη** ευθεία
- 3δ. σύνθετους** όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή, καλύπτοντας περισσότερες της μιας από τις παραπάνω περιπτώσεις.

6.1 – Η δοκός ως φορέας

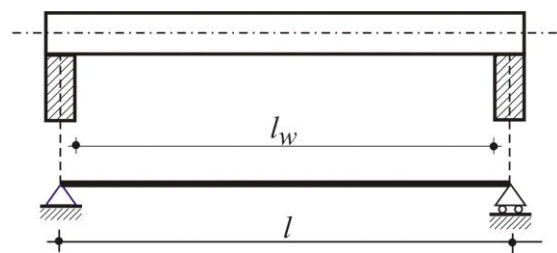
Η έννοια της **δοκού**, που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς (περίπτωση 3^α), και είναι ένα κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής.

Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μια πρισματική ράβδο, που στηρίζεται στα άκρα της ελεύθερα πάνω σε δύο στηρίγματα.

Στην πραγματικότητα η δοκός δεν μπορεί να νοηθεί χωρίς πάχος, αλλά ούτε και τα στηρίγματα χωρίς έκταση. Στη θεωρία όμως, μας είναι αρκετό να θεωρούμε τη δοκό μεν σαν ευθύγραμμο τμήμα που ταυτίζεται με τον άξονά της, ενώ τα στηρίγματά της σαν γεωμετρικά σημεία.

Έτσι φθάνουμε στην εξιδανικευμένη μορφή της **απλής αμφιέριστης** δοκού.

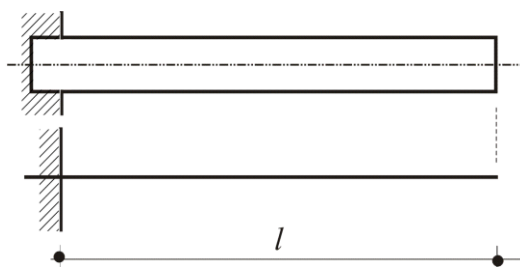
Ακόμα υποθέτουμε ότι το ένα στήριγμα της δοκού είναι αμετάθετο, ενώ το άλλο μπορεί να μετακινηθεί στην επιφάνεια στήριξης χωρίς τριβές.



Σχ. 6_2 Πραγματική και εξιδανικευμένη μορφή αμφιέριστης δοκού

Η απόσταση ανάμεσα στα δύο στηρίγματα της δοκού ονομάζεται **θεωρητικό άνοιγμα** και συμβολίζεται με l για να διακρίνεται από το **ελεύθερο άνοιγμα** l_w που παριστάνει την εσωτερική απόσταση ανάμεσα από τους τοίχους στήριξης.

Ένα άλλο είδος δοκού είναι ο **πρόβολος**. Αποτελείται από μια ράβδο της οποίας το ένα άκρο είναι καλά εντοιχισμένο, ενώ το άλλο της άκρο είναι ελεύθερο. Το μήκος που προεξέχει είναι το μήκος l του προβόλου.



Σχ. 6_3 Πραγματική και εξιδανικευμένη μορφή προβόλου

Η απλή αμφιέριστη δοκός μπορεί να φέρει πρόβολο προς τα αριστερά ή δεξιά οπότε λέγεται **(μονο)προέχουσα**.

Επίσης μπορεί να φέρει πρόβολο και από τα δύο μέρη, οπότε λέγεται **αμφιπροέχουσα**.

Αν η δοκός εκτείνεται χωρίς διακοπή πάνω από πολλά στηρίγματα, τότε λέγεται **συνεχής**.

Μερικές φορές η συνέχεια διακόπτεται από αρθρώσεις σε κατάλληλες θέσεις και αριθμό, οπότε η δοκός ονομάζεται **αρθρωτή** ή **δοκός Gerber**.

Τέλος το σώμα των δοκών είναι άλλοτε **συμπαγές**, όπως π.χ. σε μια δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα, άλλοτε είναι **δικτυωτό**, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους. Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται **ολόσωμοι** δοκοί ενώ οι δεύτερες **δικτυωτές**.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δοκών ή φορέων, ο προσδιορισμός των τάσεων σαν αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων, αποτελεί αντικείμενο μελέτης της Αντοχής των Υλικών και μπορεί να γίνει μόνο αν ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις του σώματος.

Αντίθετα ο προσδιορισμός της **συνισταμένης** των τάσεων, που γίνεται πριν από τον υπολογισμό των τάσεων, αποτελεί πρόβλημα της Δομικής Στατικής και γίνεται με τη βοήθεια των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας σε αποτεμνόμενο τμήμα του σώματος. Στις περιπτώσεις αυτές ο φορέας ονομάζεται **εσωτερικά στατικά ορισμένος**.

Όταν όμως οι τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τον προσδιορισμό των εξωτερικών αντιδράσεων, τότε ο φορέας ονομάζεται **εξωτερικά στατικά ορισμένος**.

Αν τώρα ένας φορέας είναι και εσωτερικά και εξωτερικά στατικά ορισμένος, τότε ονομάζεται απλά **στατικά ορισμένος** ή **ισοστατικός**.

Επειδή οι περισσότεροι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι, θεωρούμε έναν φορέα σαν ισοστατικό όταν το πλήθος των αντιδράσεών του (α) δεν ξεπερνά τον αριθμό 3 που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

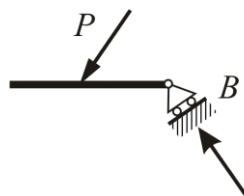
Στην αντίθετη περίπτωση, όπου $a > 3$, ο φορέας ονομάζεται **υπερστατικός** με **βαθμό στατικής αοριστίας** τον αριθμό $v = a - 3$.

6.2 – Οι στηρίξεις

Για τη στήριξη μιας δοκού είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων.

1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση.

Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές, επιτρέποντας την περιστροφή του φορέα στο επίπεδο φόρτισης.



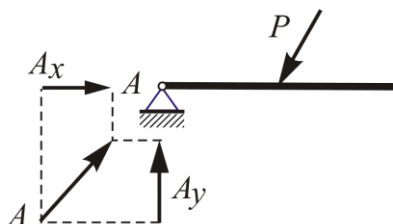
Σχ. 6_4 Τυπική μορφή κύλισης

Η αντίδραση είναι δύναμη που περνάει από το σημείο στήριξης, κάθετα στην επιφάνεια κύλισης, γιατί κατά τη διεύθυνση αυτή **αποκλείεται** η μετακίνηση του σημείου στήριξης.

Οι μετατοπίσεις που γίνονται στο επίπεδο κύλισης είναι γενικά πολύ μικρές και οφείλονται στις αναπόφευκτες παραμορφώσεις της δοκού από φορτία ή θερμοκρασιακές μεταβολές.

2. Άρθρωση

Εδώ το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στερεό σύστημα, μέσω άρθρωσης που επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού πάνω στο επίπεδο φόρτισης.

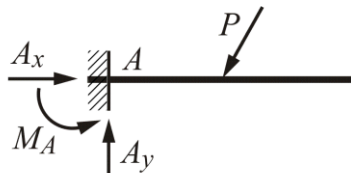


Σχ. 6_5 Τυπική μορφή άρθρωσης

Η αντίδραση επομένως A , που περνάει από την άρθρωση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, γι' αυτό και αναλύεται ουσιαστικά σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα A_x και A_y .

3. Πάκτωση

Η στήριξη αυτού του είδους, δεν επιτρέπει καμιά στροφή ή μετακίνηση στο άκρο της δοκού.



Σχ. 6_6 Τυπική μορφή πάκτωσης

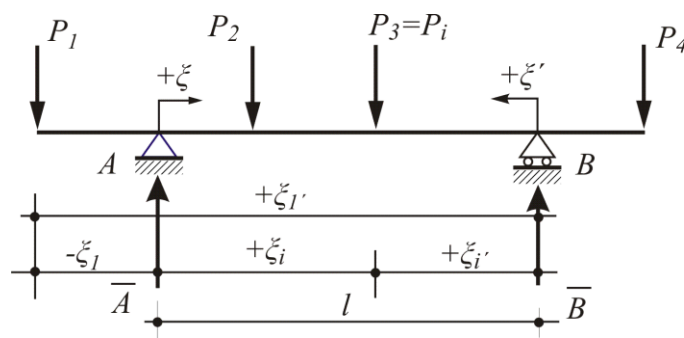
Έτσι, για τις αντιδράσεις, πέρα από την A_x και A_y που συναντήσαμε στην άρθρωση, εμφανίζεται εδώ και η αντίδραση ροπή M_A , που οφείλεται στον αποκλεισμό περιστροφής του φορέα γύρω από το A .

Γενικά παρατηρούμε ότι κάθε αντίδραση προκύπτει από την κατάργηση της ελευθερίας στην αντίστοιχη διεύθυνση της στήριξης.

6.3 – Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις

Όταν μια δοκός βρίσκεται κάτω από την ενέργεια διαφόρων φορτίων, τότε τα σημεία στήριξης μεταφέρουν στο έδαφος ορισμένες δυνάμεις. Αλλά τότε, σύμφωνα με την αρχή της αλληλεπίδρασης, και το έδαφος ασκεί στη δοκό δυνάμεις ίσες και αντίθετες, που τις ονομάζουμε **αντιδράσεις**.

1. Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος που φορτίζεται με φορτία P_i κάθετα στον άξονά της.



Σχ. 6_7 Φορτία και αντιδράσεις σε αμφιπροέχουσα δοκό

Οι αντιδράσεις \bar{A} και \bar{B} , που θα είναι επίσης κάθετες στον άξονα, προσδιορίζονται από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών προς τα δύο σημεία στήριξης. Πραγματικά, αν ξ_i και ξ_i' είναι οι αποστάσεις της τυχαίας δύναμης P_i από τις δύο στηρίξεις, τότε θα είναι:

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -(-P_1\xi_1) + P_2\xi_2 + P_3\xi_3 + P_4\xi_4 - B \cdot l = 0 \Rightarrow \sum P_i \xi_i = \bar{B} \cdot l$$

$$(\sum M)_B^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -P_1\xi'_1 - P_2\xi'_2 - P_3\xi'_3 + P_4(-\xi'_4) + A \cdot l = 0 \Rightarrow \sum P_i \xi'_i = \bar{A} \cdot l$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \sum P_i \xi'_i, \quad \bar{B} = \frac{1}{l} \sum P_i \xi_i \quad (1)$$

Στις σχέσεις (1), οι τετμημένες ξ_i και ξ'_i της τυχαίας δύναμης P_i είναι θετικές όταν η P_i ευρίσκεται μεταξύ των A και B .

Η συνθήκη μηδενισμού των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων $\sum y^{\uparrow+} = 0$, θα δώσει τώρα τη σχέση

$$\bar{A} + \bar{B} = \sum P_i$$

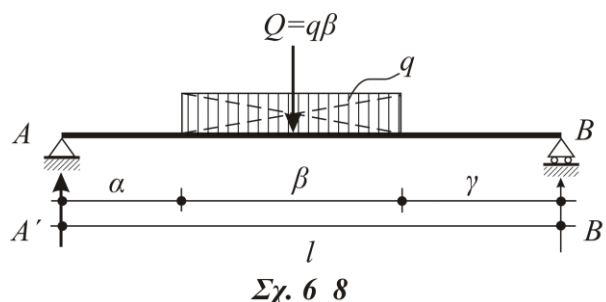
που χρησιμεύει μόνο για επαλήθευση.

2. Τα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα είναι συγκεντρωμένα, δηλαδή έχουν ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής. Είναι όμως δυνατόν τα φορτία να μη συγκεντρώνουν τη δράση τους σε ένα μόνο σημείο αλλά να εκτείνονται συνεχώς σ' όλη τη δοκό ή ένα μόνο τμήμα της, κατακόρυφα.

Ένα τέτοιο φορτίο ορίζεται αν γνωρίζουμε την τιμή του q ανά μονάδα μήκους. Έτσι λέμε π.χ. ότι σε μια δοκό ενεργεί φορτίο συνεχές και ομοιόμορφο ή απλά ομοιόμορφο ίσο με 2N/m , που σημαίνει ότι σε μήκος ενός μέτρου, συσσωρεύεται φορτίο 2N το οποίο θεωρείται ότι ενεργεί στο μέσον του μήκους του.

Γραφικά παριστάνεται, βλ. σχ. 6_8, με ένα ορθογώνιο, του οποίου η βάση είναι το φορτιζόμενο μήκος, ενώ το ύψος του, με μια κλίμακα δυνάμεων, η ανά μονάδα μήκους τιμή του φορτίου που ονομάζεται ένταση.

Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος, όπου το ομοιόμορφο φορτίο, έντασης q , ενεργεί ασύμμετρα σε ένα τμήμα της δοκού.



Οι αντιδράσεις A' και B' , άνισες και κάθετες στον οριζόντιο άξονα της δοκού, θα προσδιοριστούν με το σκεπτικό της προηγούμενης παραγράφου, αφού πρώτα μετατραπεί το συνεχές φορτίο σε συγκεντρωμένο,

με ένταση $Q=q\beta$ και φορέα κατακόρυφο που περνάει από το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1), έχουμε:

$$A' = Q \frac{\xi'}{l} = q\beta \frac{\gamma + \beta/2}{l}$$

$$B' = Q \frac{\xi}{l} = q\beta \frac{a + \beta/2}{l}$$

3. Όταν το φορτίο είναι συνεχές αλλά όχι ομοιόμορφο, που σημαίνει ότι η ένταση του συνεχούς φορτίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που εκφράζει τη συνισταμένη του συνεχούς φορτίου σε ένταση και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης, από όπου περνάει ο φορέας της συνισταμένης.

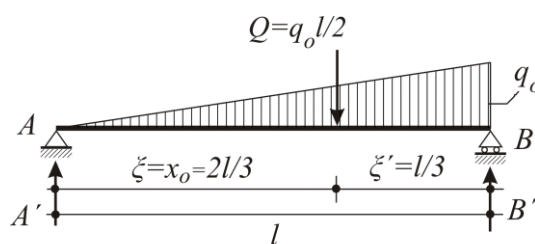
Έστω για παράδειγμα η δοκός AB του παρακάτω σχήματος, 6_9, που φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο και έχει ακραία τιμή στο στήριγμα B ίση με q_0 .

Αν Q είναι η ένταση της συνισταμένης (εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης) και x_0 η απόσταση του φορέα της (κεντροειδές) από το αριστερό στήριγμα A, τότε θα είναι:

$$A' = Q \frac{l - x_0}{l}, \quad B' = Q \frac{x_0}{l}$$

Η συνισταμένη του φορτίου αυτού έχει ένταση ίση με το εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας φόρτισης, δηλαδή:

$$Q = \frac{1}{2} q_0 l,$$



Σχ. 6_9

και θα βρίσκεται σε απόσταση από το A ίση προς την τετμημένη του κεντροειδούς του τριγώνου, δηλαδή $2l/3$.

Άρα οι αντιδράσεις θα είναι:

$$A' = \frac{Q\xi'}{l} = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3l} = \frac{q_0 l}{6} \text{ και}$$

$$B' = \frac{Q\xi}{l} = \frac{q_0 l}{3}$$

Σημείωση: Αν στις παραπάνω περιπτώσεις εμφανιστούν σαν εξωτερικά φορτία και συγκεντρωμένες ροπές, τότε αυτές προστίθενται αλγεβρικά (ανάλογα με τη φορά τους) στις συνθήκες μηδενισμού των ροπών της παραγράφου 1, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση εφαρμογής τους.

6.4 – Τα φορτία διατομής

Η δοκός σαν κατασκευαστικό στοιχείο συναντάται πάρα πολύ συχνά στην πράξη. Μπορεί να πάρει δυνάμεις και κατά τη διεύθυνση του άξονά της και κάθετα σ' αυτόν. Μπορεί δηλαδή να ενταθεί όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, καμπτικά ή στρεπτικά, δηλαδή σύνθετα.

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων, εφ' όσον βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα της δοκού, έχει σα συνέπεια την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή τριών γενικά εντατικών μεγεθών, που ονομάζονται **φορτία διατομής**.

Τα φορτία διατομής, που συμβολίζονται αντίστοιχα με τα γράμματα N , Q , M , είναι:

1. Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
2. Η τέμνουσα δύναμη (Q) και
3. Η ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή (M)

Αν υπολογίσουμε τα N , Q , M σε κάθε διατομή του φορέα, και, με κάποια κλίμακα, σχεδιάσουμε τις τεταγμένες των τιμών τους κατά μήκος του φορέα, θα πάρουμε τότε τα αντίστοιχα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (N), (Q), (M).

Αν ο φορέας είναι στο χώρο, τότε εκτός από την καμπτική ροπή σε τυχούσα διατομή, εμφανίζεται και ροπή στρέψης M_t .

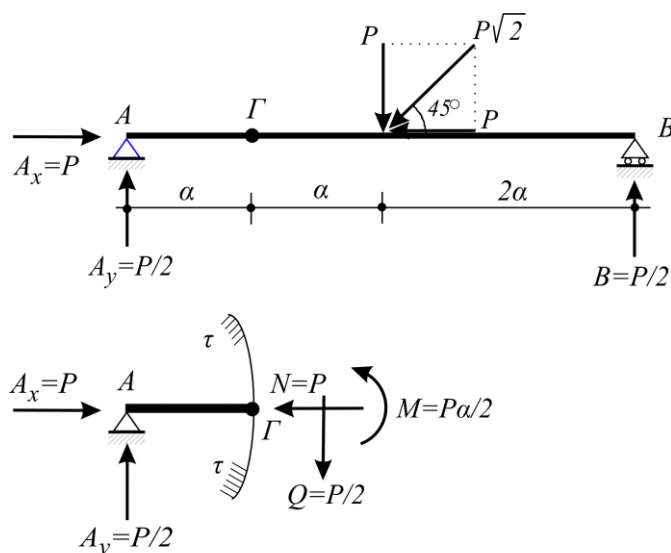
Για να γνωρίσουμε τα φορτία διατομής θεωρούμε την αμφιέρεστη δοκό του σχήματος που φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο $P\sqrt{2}$ υπό γωνία 45° .

Αν αναλύσουμε την $P\sqrt{2}$ σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, κάθε μία ίση με P , μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας τις τρεις γνωστές στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας.

$$(\Sigma M)_T^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow P \cdot 2a - B \cdot 4a = 0 \Rightarrow B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow A_x - P = 0 \Rightarrow A_x = P$$



Σχ. 6_10 Τα φορτία διατομής στη θέση Γ

Απομονώνοντας τώρα το τμήμα ΑΓ με την τομή ττ, ας εξετάσουμε την ισορροπία του.

Για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την οριζόντια έννοια και να ισχύει επομένως η συνθήκη $\Sigma x^{\rightarrow+} = 0$, θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ και κάθετα προς αυτή, να ασκηθεί δύναμη $N = P$, ίση και αντίθετη της $A_x = P$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί παράλληλα προς τον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η **αξονική ή ορθή δύναμη** N .

Όμοια, για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την κατακόρυφη έννοια και να ισχύει η συνθήκη $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$, θα πρέπει, πάντα πάνω στη διατομή Γ, να τοποθετηθεί η δύναμη $Q = P/2$, ίση και αντίθετη της $A_y = P/2$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί κάθετα στον άξονα του φορέα και πάνω στη διατομή είναι η **τέμνουσα δύναμη** (Q).

Τέλος για να εξασφαλίσουμε το άστρεπτο του τμήματος ΑΓ, ώστε να ισχύει η συνθήκη $(\Sigma M)_{\Gamma^{\perp+}} = 0$, θα πρέπει, στο κεντροειδές της διατομής Γ, να εμφανιστεί ροπή $M = Pa/2$ ίση και αντίθετη με εκείνη που δημιουργεί στην ίδια διατομή (Γ) η αντίδραση A_y , που είναι $M' = A_y \alpha = Pa/2$.

Η ροπή αυτή, είναι η **ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή** (M).

6.5 – Σήμανση των φορτίων διατομής

Για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους N ή Q ή M μιας διατομής υπολογίζεται το αλγεβρικό άθροισμα **όλων** των δυνάμεων (εξωτερικών φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται αριστερά ή δεξιά της διατομής και επηρεάζουν το συγκεκριμένο μέγεθος.

Το κριτήριο για την από αριστερά ή δεξιά επιλογή, είναι ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων ή ροπών αντίστοιχα που συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Όταν σε μια **συγκεκριμένη** διατομή του φορέα ασκείται:

- α) συγκεντρωμένη δύναμη που είναι κάθετη στη διατομή (αξονικά)
- β) συγκεντρωμένη δύναμη που κείται στη διατομή (τμητικά) ή
- γ) συγκεντρωμένη ροπή,

τότε **στη** διατομή αυτή είναι **αδύνατος** αντίστοιχα ο προσδιορισμός της:

- α) αξονικής δύναμης N
- β) τέμνουσας δύναμης Q και
- γ) καμπτικής ροπής M .

Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός του υπόψη εντατικού μεγέθους γίνεται για την αριστερή ή δεξιά παρειά (πλευρά) της διατομής, οπότε παρουσιάζεται διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο παρειών, που ισούται με την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου στη διατομή.

Το φαινόμενο αυτό, για το αντίστοιχο διάγραμμα (N), (Q) ή (M) είναι γνωστό σαν **άλμα**.

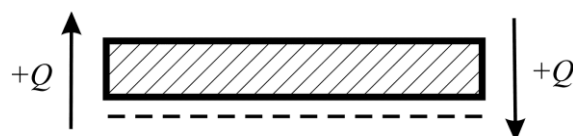
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους σε μια διατομή, θα πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το πότε μια δύναμη ή ροπή δίνει θετική ή αρνητική τιμή στο προσδιοριζόμενο εντατικό μέγεθος.

Ανεξάρτητα λοιπόν του αν η οποιαδήποτε δύναμη ή ροπή που προκαλεί ένα εντατικό μέγεθος, βρίσκεται **αριστερά** ή **δεξιά** της διατομής (ή παρειάς της):



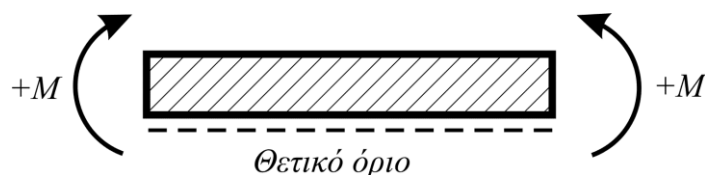
Σχ. 6_11 Σήμανση αξονικών δυνάμεων

1. Η αξονική δύναμη N που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει** τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την **θλίψει**.



Σχ. 6_12 Σήμανση τεμνουσών δυνάμεων

2. Η τέμνουσα δύναμη Q που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί **δεξιόστροφα** ως προς τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να περιστραφεί **αριστερόστροφα**.



Σχ. 6_13 Σήμανση καμπτικών ροπών

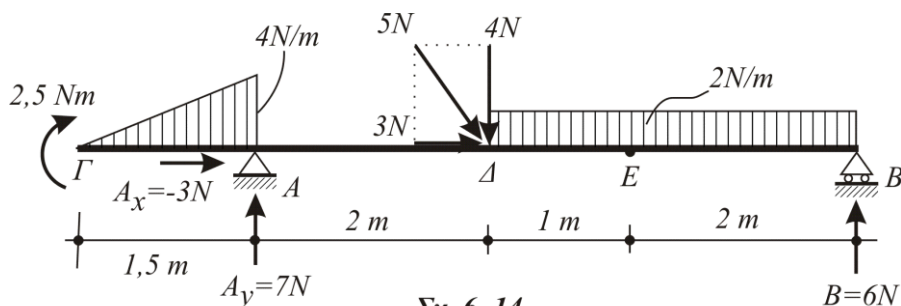
3. Η καμπτική ροπή M που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **Θετική** όταν η δύναμη ή η συγκεντρωμένη ροπή που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει την κάτω ίνα** του φορέα στη θέση της διατομής. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει.

Η κάτω ίνα του φορέα είναι γνωστή και σαν **Θετικό όριο** και συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή. Στην περίπτωση κατακόρυφου τμήματος του φορέα, η επιλογή του Θετικού ορίου (προς τα αριστερά ή δεξιά) είναι αυθαίρετη.

6.6 – Παράδειγμα

Στη μονοπροέχουσα δοκό του σχήματος 6_14, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A και B , καθώς και οι τιμές των N , Q , M στις διατομές Γ , Δ και E .

Λύση



Σχ. 6_14

Οι **αντιδράσεις** θα προκύψουν από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - B \cdot 5 = 0 \Rightarrow B = 6 \text{ N}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 4 - 2 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow A_y = 7 \text{ N}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow A_x + 3 = 0 \Rightarrow A_x = -3 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο της A_x δηλώνει ότι η **σωστή** φορά της A_x είναι **αντίθετη** από εκείνη που διαλέξαμε.

Προαιρετικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις αντιδράσεις A_y και B , ή μόνον την A_y , παίρνοντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τυχόν σημείο του άξονα του φορέα, ή τη στήριξη B αντίστοιχα.

$$(\Sigma M)_B^{\uparrow\uparrow} = 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 5,5 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0!$$

Διατομή Γ (δυνάμεις από αριστερά)

Λόγω της συγκεντρωμένης ροπής στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την καμπτική ροπή, οπότε θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 0$$

$$M^{ap} = 0$$

$$M^{\delta\epsilon\chi} = + 2,5 \text{ Nm}$$

Διατομή Δ (δυνάμεις από δεξιά)

Λόγω συγκεντρωμένης οριζόντιας και κατακόρυφης δύναμης στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την αξονική και την τέμνουσα δύναμη, οπότε θα έχουμε:

$$N^{ap} = + 3 \text{ N}$$

$$N^{\delta\epsilon\chi} = 0$$

$$Q^{ap} = 4 + 2 \cdot 3 - 6 = + 4 \text{ N}$$

$$Q^{\delta\epsilon\chi} = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M = - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 = + 9 \text{ Nm}$$

Διατομή Ε (δυνάμεις από δεξιά)

Εδώ δε γίνεται διάκριση τιμών στις παρειές της διατομής για κανένα εντατικό μέγεθος, επειδή δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη οριζόντια ή κατακόρυφη δύναμη ή ροπή.

Το συνεχές φορτίο στη διατομή δε θεωρείται συγκεντρωμένη δύναμη, διότι το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που αντιστοιχεί στη διατομή είναι μηδέν. Άρα θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 2 \cdot 2 - 6 = - 2 \text{ N}$$

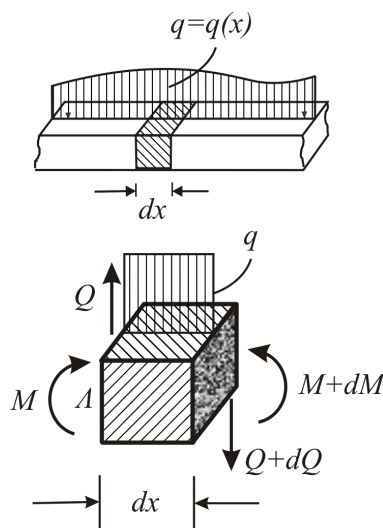
$$M = - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 8 \text{ Nm.}$$

6.7 – Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών q , Q & M

Θεωρούμε ένα τμήμα μιας δοκού του σχήματος 6_15, που φορτίζεται με συνεχή φόρτιση μεταβλητής έντασης $q = q(x)$.

Αν αποκόψουμε από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx , με δυο τομές κάθετες στον άξονά της, σε αποστάσεις x και $x+dx$, παρατηρούμε ότι στο τμήμα dx η ένταση της συνεχούς φόρτισης είναι σταθερή, με μέγεθος, έστω q .

Επίσης, αν Q και M η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στην αριστερή διατομή του τμήματος, τότε στη δεξιά διατομή του, λόγω του ομοιόμορφου φορτίου που μεσολαβεί, τα αντίστοιχα μεγέθη θα εμφανιστούν με αντίθετες φορές, και τιμές ελάχιστα διαφορετικές, έστω $Q+dQ$ και $M+dM$. Οι απειροστές ποσότητες dQ και dM είναι δυνατόν να είναι και αρνητικές.



Σχ. 6_15

Τώρα, στο στοιχειώδες τμήμα που ισορροπεί, η χρησιμοποίηση της συνθήκης μηδενισμού των κατακόρυφων δυνάμεων, δίνει:

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Q - q \cdot dx - Q - dQ = 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (\text{i})$$

Επίσης, η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς την αριστερή διατομή του τμήματος, δίνει:

$$(\Sigma M)_{\Lambda}^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow M + q \cdot dx \frac{dx}{2} + (Q + dQ)dx - M - dM = 0,$$

από την οποία, παραλείποντας τους όρους $\frac{q \cdot dx^2}{2}$ και $dQ \cdot dx$ σαν απειροστά ανώτερης τάξης, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (ii)$$

Οι σχέσεις (i) και (ii) συνδυαζόμενες μεταξύ τους, δηλώνουν ότι:

1. Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού, όπου $q=0$, η τέμνουσα δύναμη Q , σαν ολοκλήρωμα της q , έχει σταθερή τιμή, ενώ η καμπτική ροπή M , σαν ολοκλήρωμα της Q , μεταβάλλεται γραμμικά.

2. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται ομοιόμορφα, όπου $q=a$ σταθ., η Q μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση του x , ενώ η M μεταβάλλεται παραβολικά.

3. Σε περιοχή της δοκού η οποία φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), όπου $q=ax+\beta$, η Q μεταβάλλεται παραβολικά σε συνάρτηση του x , ενώ η M μεταβάλλεται κατά καμπύλη 3^{ου} βαθμού κ.ο.κ. Γενικά, αν η εξωτερική φόρτιση σε τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση βαθμού n , τότε η τέμνουσα δύναμη που αντιστοιχεί στο ίδιο τμήμα είναι βαθμού $n+1$, ενώ η καμπτική ροπή $n+2$.

4. Η M παίρνει ακρότατη τιμή και μάλιστα μέγιστη, εκεί όπου μηδενίζεται η Q .

5. Η M σε κάποια διατομή μπορεί να υπολογιστεί, αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής προσθέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δυο διατομές. Πραγματικά, αν M_o είναι η καμπτική ροπή στη θέση x_o και M η αντίστοιχη στη θέση x , η σχέση (ii), που γράφεται:

$$dM = Q \cdot dx,$$

μετά από ολοκλήρωση από x_o έως x , δίνει:

$$\int_{M_o}^M dM = \int_{x_o}^x Q \cdot dx \quad \text{ή} \quad M - M_o = \int_{x_o}^x Q \cdot dx,$$

$$\text{ή τελικά} \quad M = M_o + \int_{x_o}^x Q \cdot dx$$

6. Η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων, ισούται με την τιμή της εξωτερικής φόρτισης q που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

Εντελώς ανάλογα, η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος καμπτικών ροπών (M), ισούται με την τιμή της τέμνουσας δύναμης Q που συναντιέται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

6.8 – Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M

Η έννοια του διαγράμματος ενός εντατικού μεγέθους ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση των τιμών που λαμβάνει το υπόψη εντατικό μέγεθος σε κάθε διατομή του φορέα.

Η γραφική αυτή παράσταση γίνεται σε ανάλογο προς τη μορφή του φορέα σύστημα αξόνων, όπου ο άξονας των τετμημένων είναι ίδιος με τον άξονα του φορέα, ορίζοντας έτσι τις θέσεις των διατομών, ενώ οι τεταγμένες δίνουν τις αντίστοιχες τιμές του εντατικού μεγέθους.

Παραλείποντας το διάγραμμα (N) λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει αλλά και της περιορισμένης χρησιμότητάς του, θ' αναφερθούμε στην κατασκευή των διαγραμμάτων (Q) και (M), η οποία μπορεί να γίνει:

α) γραφικά με τη βοήθεια του σχοινοπολυγώνου και

β) αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Η πρώτη μέθοδος συναντιέται συνήθως μόνο στις περιπτώσεις όπου τα φορτία της δοκού είναι συγκεντρωμένα, χωρίς να εμφανίζεται συγκεντρωμένη ροπή. Και αυτό επειδή η ύπαρξη συνεχούς φορτίου απαιτεί το χωρισμό του σε μικρότερα τμήματα, τα οποία θα αντικατασταθούν από συγκεντρωμένες δυνάμεις, των οποίων ο αριθμός είναι ανάλογος με την ακρίβεια που επιδιώκουμε.

Η δεύτερη μέθοδος, η οποία θα μας απασχολήσει κυρίως παρακάτω, καλύπτει κάθε μορφή ισοστατικής δοκού με οποιαδήποτε φόρτιση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M με τη μέθοδο αυτή, είναι:

1. Χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια, την εμφάνιση:

- συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q), ή συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M),
- αρχής, τέλους ή άλματος στη συνεχή φόρτιση

M' άλλα λόγια, ο νόμος που εκφράζει τη μεταβολή της εξωτερικής φόρτισης, να είναι ο ίδιος σε όλο το τμήμα.

2. Ξεκινώντας από το πρώτο τμήμα, αποφασίζουμε το **από πού** θα πάρουμε τις δυνάμεις (αριστερά ή δεξιά της τυχαίας διατομής) που επηρεάζουν το εντατικό μέγεθος που εξετάζουμε, διαλέγοντας, για διευκόλυνση, απ' εκεί που υπάρχει ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων.

3. Ορίζουμε σε παρένθεση τα όρια α και δ, μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται η τυχαία διατομή του τμήματος, σαν αποστάσεις των άκρων του

από το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού. Στην περίπτωση που ορίζουμε σαν αφετηρία το δεξιό τέρμα, το σημειώνουμε.

4. Σχηματίζουμε τώρα, συνάρτησε του x , την εξίσωση που εκφράζει τη μεταβολή του εντατικού μεγέθους, παίρνοντας, **απ' τη διατομή και πέρα** μέχρι το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού, **όλες** τις:

- κατακόρυφες δυνάμεις και αντιδράσεις (για το διάγραμμα Q)
- συγκεντρωμένες ροπές και ροπές των δυνάμεων και αντιδράσεων **ως προς την τυχαία διατομή** (για το διάγραμμα M).

5. Ελέγχουμε το βαθμό της εξίσωσης που προέκυψε για το εντατικό μέγεθος, ανάλογα με τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης στο τμήμα (σχέσεις i και ii της ενότητας 6.7).

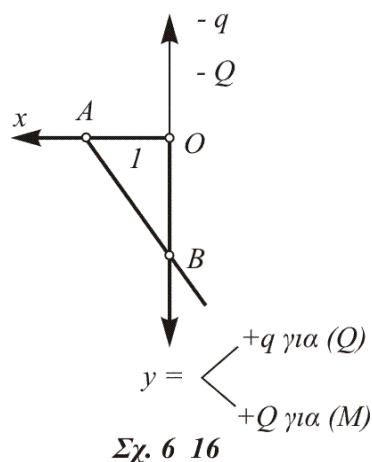
6. Θέτοντας ήδη στην εξίσωση, όπου x , τα όρια a και δ , προσδιορίζουμε τις τιμές του μεγέθους στα άκρα του τμήματος. Τις τιμές αυτές τοποθετούμε με κατάλληλη κλίμακα στις αντίστοιχες θέσεις του άξονα των τετμημένων, που σχεδιάσαμε ήδη, για την κατασκευή του διαγράμματος.

Αν η γραμμή που εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους είναι ευθεία, ενώνουμε τις τεταγμένες των άκρων της. Αν όμως είναι καμπύλη, τότε,

7. Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες της καμπύλης (σκεπτικό 6 της ενότητας 6.7) στα χαρακτηριστικά σημεία, των οποίων προσδιορίσαμε ήδη τις τεταγμένες τους, σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους:

α) Σχεδιάζουμε το σύστημα αξόνων του σχήματος 6_16, που είναι το γνωστό μας Καρτεσιανό, αλλά με αντίθετες τις φορές των αξόνων.

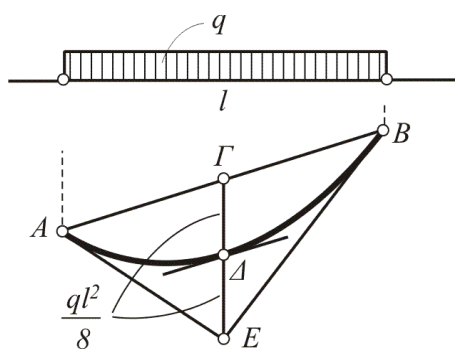
Στον άξονα Ox παίρνουμε τμήμα OA ίσο με τη **μονάδα μήκους** του άξονα των τετμημένων του διαγράμματος που σχεδιάζουμε (συνηθέστατα είναι ίσος με τον άξονα της δοκού). Στον άξονα Oy , θέτουμε με την κλίμακα τιμών του διαγράμματος που κατασκευάζουμε, την τιμή B που είναι τιμή:



- της εξωτερικής φόρτισης q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα Q)
- της τέμνουσας δύναμης Q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα M)

Η AB είναι τότε η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος.

Είναι ευκολονόητο, ότι στις διατομές όπου η q ή η Q είναι 0, η εφαπτομένη του διαγράμματος (Q) ή (M) αντίστοιχα, είναι οριζόντια.



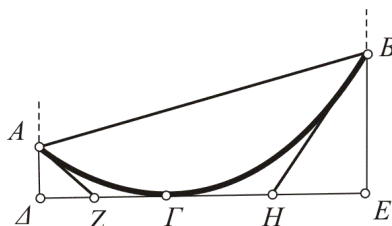
Σχ. 6_17

β) Για την κατασκευή του παραβολικού τμήματος που περνάει από δύο σημεία A, B του διαγράμματος (M), βλ. σχ. 6_17, όταν είναι γνωστό ότι το τμήμα l του φορέα που είναι ανάμεσα στα σημεία αυτά φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, αν από το μέσο Γ της AB φέρουμε κατακόρυφα τμήματα,

$$\Gamma\Delta = \Delta E = \frac{ql^2}{8},$$

τότε η παραβολή περνάει από το σημείο Δ και εφάπτεται των ευθειών AE και BE στα σημεία A και B αντίστοιχα. Επίσης εφάπτεται στο Δ της ευθείας που είναι παράλληλη προς την AB και περνάει από το Δ .

γ) Αν είναι γνωστό ότι η παραπάνω παραβολή περνάει από τα σημεία A και B του σχήματος 6_18 και ότι το Γ είναι ακρότατο της παραβολής, τότε η κατασκευή των εφαπτόμενων στα A και B ακολουθεί τον τρόπο που φαίνεται ήδη στο σχήμα. Δηλαδή:



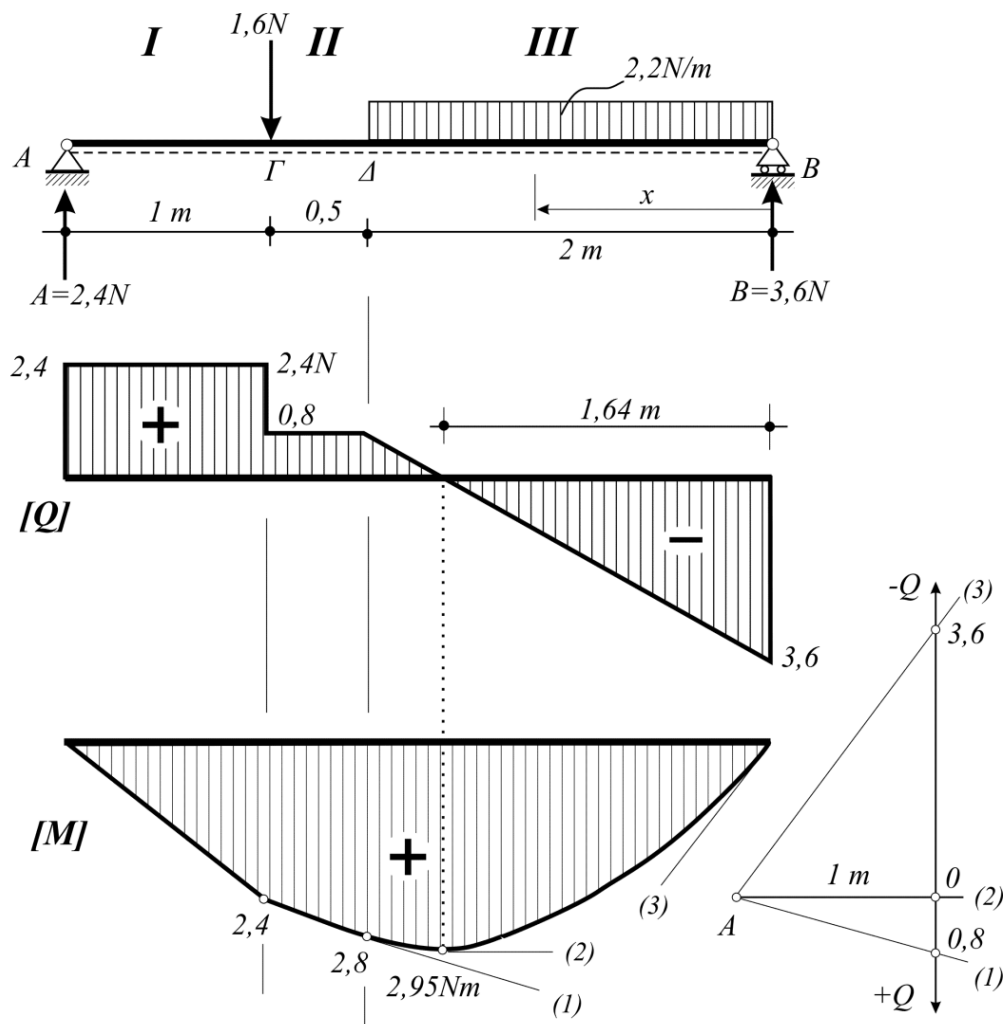
Σχ. 6_18

Από το Γ που είναι ακρότατο, φέρουμε οριζόντια ευθεία, η οποία τέμνεται από τις κατακόρυφες που περνούν από τα A και B , στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν Z και H είναι τα μέσα των οριζοντίων τμημάτων $\Delta\Gamma$ και ΓE , τότε οι ευθείες AZ και BH είναι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Σημείωση: Στα παραδείγματα κατασκευής των διαγραμμάτων Q και M που ακολουθούν γίνεται αυστηρή τήρηση των παραπάνω βημάτων. Έτσι θα αποφεύγονται επαναλαμβανόμενες επεξηγήσεις ή διευκρινήσεις στις επί μέρους εξισώσεις ή κατασκευές. Διευκρινήσεις θα δίνονται μόνον όταν, λόγω ιδιομορφίας κρίνεται απαραίτητο, έτσι ώστε να βοηθήσουν αποτελεσματικά στην κατανόηση των διαγραμμάτων από τους φοιτητές.

6.9 – Παραδείγματα

1 Της αμφιέρειστης δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Σχ. 6_19 Διαγράμματα Q , M αμφιέρειστου δοκού

Λύση

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1,6 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 \cdot 2,5 - 3,6 \cdot B = 0 \Rightarrow B = 3,6 \text{ N}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 1,6 - 2,2 \cdot 2 + 3,6 = 0 \Rightarrow A = 2,4 \text{ N}$$

Επαλήθευση αντιδράσεων

$$(\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = 2,4 \cdot 1,5 - 1,6 \cdot 0,5 + 2,2 \cdot 2 \cdot 1 - 3,6 \cdot 2 = 0 !$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 1$)

$$Q_I = 2,4 \text{ N}$$

Τμήμα II ($1 < x \leq 1,5$)

$$Q_{II} = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 2$) από δεξ.

$$Q_{III} = 2,2x - 3,6$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -3,6 \text{ N}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_\Delta = 0,8 \text{ N}$$

Μετά την παρατήρηση ότι η τέμνουσα αλλάζει πρόσημο στα άκρα του τμήματος, βρίσκουμε το σημείο μηδενισμού της. Είναι :

$$Q_{III} = 0, \text{ για } 2,2x - 3,6 = 0 \Rightarrow x = 1,64 \text{ m.}$$

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1$)

$$M_I = 2,4x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow M_\Gamma = 2,4 \text{ Nm}$$

Τμήμα II ($1 \leq x \leq 1,5$)

$$M_{II} = 2,4x - 1,6(x - 1).$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_\Gamma = 2,4 \text{ Nm,}$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_\Delta = 2,8 \text{ Nm.}$$

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 2$) από δεξ.

$$M_{III} = 3,6x - 2,2 \cdot x \cdot x / 2 = 3,6x - 1,1x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_\Delta = 2,8 \text{ Nm,}$$

$$x = 1,64 \text{ m} \Rightarrow M_{III \max} = 2,95 \text{ Nm}$$

Παρατήρηση:

Η ευθεία του διαγράμματος (M) της περιοχής II, είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (1) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής III.

2

Της **μονοπροέχουσας** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

ΛύσηΑντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\leftarrow +} = 0 \Rightarrow -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 - B \cdot 4 = 0 \Rightarrow B = 4 \text{ N}$$

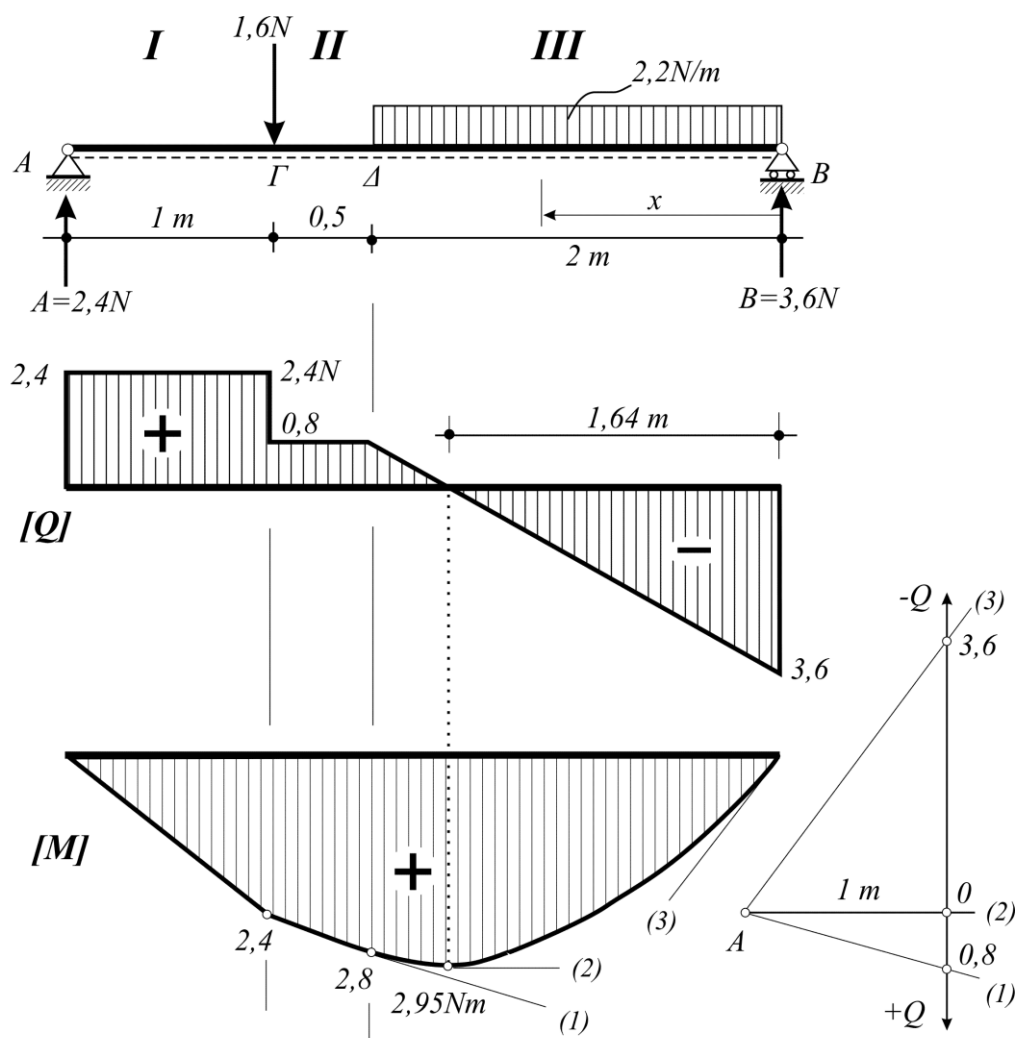
$$\Sigma \gamma^{\uparrow +} = 0 \Rightarrow A - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 2,5 - 2 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow A = 7,5 \text{ N}$$

$$\text{Επαλήθευση : } (\Sigma M)_A^{\leftarrow +} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 1,5 + 7,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 0 !$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 \leq x < 1,5$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε τυχούσα διατομή του τμήματος I που απέχει απόσταση x από το αριστερό άκρο της δοκού, από τα όμοια τρίγωνα προκύπτει:



Σχ. 6_19 Διαγράμματα Q, M αμφιερείστων δοκού

$$\frac{q_x}{4} = \frac{x}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5} x$$

$$\text{Άρα: } Q_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{4}{1,5} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{1,5} x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_I = 0$$

$$x = 1,5 \Rightarrow Q_A^{ap} = -3 \text{ N}$$

Τμήμα II ($1,5 < x \leq 2,5$)

$$Q_{II} = -4 \cdot 1,5/2 + 7,5 = 4,5 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x < 3$)

$$Q_{III} = 2x - 4.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -4 \text{ N}$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_D^{\delta\epsilon\chi} = +2 \text{ N.}$$

$$\text{Είναι } Q_{III} = 0, \text{ όταν } 2x - 4 = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ m.}$$

Παρατήρηση:

Η τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης 2,5 N, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$.

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1,5$)

$$M_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{4}{1,5} x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{4,5} x^3$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_I = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm}$$

Τμήμα II ($1,5 \leq x \leq 2,5$)

$$M_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2}(x-1) + 7,5(x-1,5)$$

$$\text{Για } x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_D = +3 \text{ Nm.}$$

$$\text{Είναι } M_{II} = 0, \text{ όταν } -3x + 3 + 7,5x - 11,25 = 0 \text{ ή } x = 1,83 \text{ m.}$$

Σημείωση:

Ειδικά για το τμήμα αυτό, λόγω γραμμικής μεταβολής της καμπτικής ροπής M, το σημείο μηδενισμού της μπορεί να βρεθεί και από τα όμοια τρίγωνα του διαγράμματος.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

$$M_{III} = 4x - 2x \frac{x}{2} = 4x - x^2$$

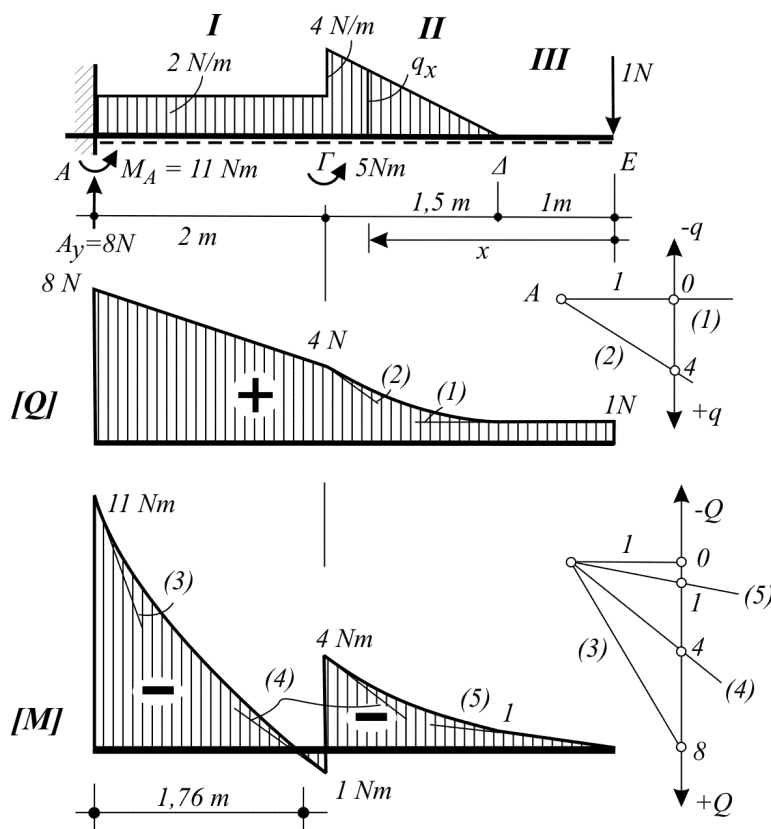
$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow M_{\Delta} = +3 \text{ Nm}$$

$$\text{για } x = 2 \text{ m είναι } M_{III \max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 \text{ Nm}$$

3

Του **προβόλου** που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

Λύση

Σχ. 6_21 Διαγράμματα Q, M προβόλου

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow -M_A + 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2,5 + 1 \cdot 4,5 - 5 = 0 \Rightarrow M_A = 11 \text{ Nm}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 1 \Rightarrow A = 8 \text{ N}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_E^{\perp+} = -11 + 8 \cdot 4,5 - 2 \cdot 2 \cdot 3,5 - 5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2 = 0 !$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I (0 < x ≤ 2)

$$Q_I = 8 - 2x$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\chi} = 8 \text{ N}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ N}$$

Τμήμα II ($1 \leq x \leq 2,5$) από δεξ.

$$\text{Είναι: } \frac{q_x}{4} = \frac{x-1}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5}(x-1)$$

$$\text{Άρα: } Q_{II} = 1 + q_x \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{4}{1,5}(x-1) \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{2}{1,5}(x-1)^2.$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow Q_{\Delta} = 1 \text{ N}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ N (επαλήθευση της } Q_{\Gamma} \text{ από το Τμήμα I)}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 1$) από δεξ.

$$Q_{III} = 1 \text{ N σταθ.}$$

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 < x < 2$)

$$M_I = -11 + 8x - 2x \cdot x/2 = -11 + 8x - x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A^{\delta\epsilon\chi} = -11 \text{ Nm,}$$

$$x = 2 \Rightarrow M_{\Gamma}^{ap} = +1 \text{ Nm.}$$

Είναι: $M_I = 0$, όταν $x^2 - 8x + 11 = 0$. Από τις ρίζες της εξίσωσης,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 11 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4,47}{2} \begin{cases} 6,24 \\ 1,76 \end{cases},$$

η $x_1 = 6,24 \text{ m}$ απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του x στο τμήμα I.

Τμήμα II ($1 \leq x < 2,5$) από δεξ.

$$M_{II} = -1 \cdot x - q_x \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = -x - \frac{4}{1,5}(x-1) \cdot \frac{(x-1)^2}{6} = -x - \frac{2}{4,5}(x-1)^3$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm,}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\chi} = -4 \text{ Nm.}$$

Παρατήρηση:

Αντίστοιχα προς την παρατήρηση του παραδείγματος 2, η τιμή της συγκεντρωμένης ροπής στο Γ , $M = 5 \text{ Nm}$, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της $(\Sigma M)^{+} = 0$.

Φυσικά, σε κάθε όμοια παρατήρηση, είναι προφανές ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τιμών του διαγράμματος που προέκυψε για τη δεξιά και την αριστερή παρειά της διατομής του άλματος είναι ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου μεγέθους.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 1$) από δεξ.

$$M_{III} = -1 \cdot x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm}.$$

Σημείωση:

Η ευθεία του διαγράμματος στο τμήμα III, είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (5) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής II (αντίστοιχη παρατήρηση του παραδείγματος 1).

4

Της **αμφιπροέχουσας** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

Λύση

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 - 6 - B \cdot 5 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 10,5N}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 + 10,5 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{A = 15 \text{ N}}.$$

Επαλήθευση

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{\uparrow+} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 - 10,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 0 !$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 2$)

$$Q_I = -2 - 1 \cdot x$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\chi} = -2 \text{ N},$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_A^{ap} = -4 \text{ N}.$$

Τμήμα II ($2 < x < 5$)

$$Q_{II} = -2 - 1 \cdot 2 + 15 - 4(x - 2) = 11 - 4(x - 2).$$

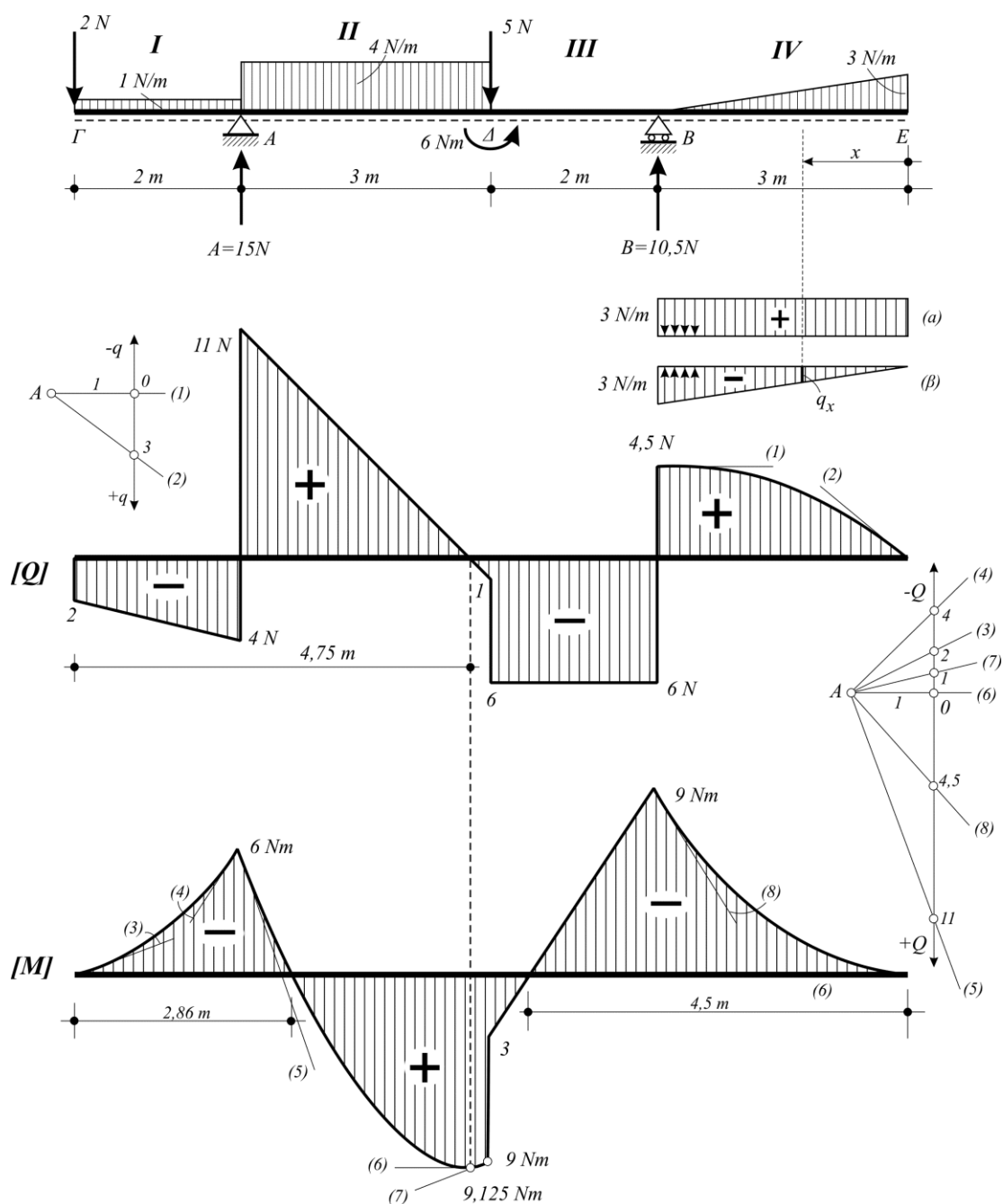
$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\chi} = 11 \text{ N},$$

$$x = 5 \Rightarrow Q_{\Delta}^{ap} = -1 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0, \text{ για } 11 - 4x + 8 = 0, \text{ ή } x = 4,75 \text{ m}.$$

Τμήμα III ($3 < x < 5$) από δεξ.

$$Q_{III} = \frac{3 \cdot 3}{2} - 10,5 = -6 \text{ N σταθ.}$$



Σχ. 6_22 Διαγράμματα Q , M αμφιπροέχουσας δοκού - μετατροπή τριγωνικού φορτίου

Τμήμα IV ($0 \leq x < 3$) από δεξ.

Επειδή προτίθεται να λάβω τις δυνάμεις δεξιά της τυχούσας διατομής, όπου η φόρτιση είναι τραπεζοειδής, θεωρώ ότι η δοθείσα τριγωνική φόρτιση του τμήματος είναι συνισταμένη δύο φορτίσεων:

Μιας ομοιόμορφης, έντασης 3 N/m με φορά προς τα κάτω, και μιας τριγωνικής, μέγιστης έντασης 3 N/m στη διατομή Α, με φορά προς τα πάνω (σχήματα α, β).

Αν τώρα q_x είναι η ένταση της τριγωνικής συνιστώσας (σχήμα β) στην τυχαία διατομή που απέχει x από το Ε, τότε:

$$\frac{q_x}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = x.$$

$$\text{Άρα: } Q_{IV} = 3x - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_B^{\delta\epsilon\chi} = 4,5 \text{ N}.$$

Διάγραμμα Μ

Τμήμα Ι ($0 \leq x \leq 2$)

$$M_I = -2x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm}.$$

Τμήμα ΙΙ ($2 \leq x < 5$)

$$M_{II} = -2x - 1 \cdot 2(x-1) + 15(x-2) - \frac{4(x-2)^2}{2}$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm},$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{ap} = 9 \text{ Nm}.$$

για $x = 4,75 \text{ m}$, είναι $M_{II \max} = 9,125 \text{ Nm}$.

$$\text{Είναι: } M_{II} = 0, \text{ όταν } -2x - 2x + 2 + 15x - 30 - 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

$$\text{ή } x^2 - 9,5x + 18 = 0. \text{ Από τις ρίζες της,}$$

$$x_{1,2} = \frac{9,5 \pm \sqrt{90,25 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9,5 \pm 4,27}{2} \left\langle \begin{matrix} 6,89 \\ 2,49 \end{matrix} \right.$$

η $x_1 = 6,89 \text{ m}$ απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του τμήματος.

Τμήμα ΙΙΙ ($3 \leq x < 5$) από δεξ.

$$M_{III} = -\frac{3 \cdot 3}{2}(x-1) + 10,5(x-3).$$

$$\text{Για } x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ Nm},$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{\delta\epsilon\chi} = 3 \text{ Nm}.$$

Είναι: $M_{III} = 0$, όταν $-4,5x + 4,5 + 10,5x - 31,5 = 0$ ή $x = 4,5$ m.

Τμήμα IV ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

Θεωρώντας, όπως και στο διάγραμμα τεμνουσών, επαλληλία των δύο φορτίσεων,

$$M_{IV} = -3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Για $x = 0 \Rightarrow M_E = 0$,

$x = 3 \Rightarrow M_B = -9$ Nm.

5 Του πλαισιωτού φορέα που εικονίζεται παρακάτω, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις του A και B και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q), καμπτικών ροπών (M) και αξονικών δυνάμεων (N) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

Λύση

Αντιδράσεις

Αν B_x και B_y είναι η οριζόντια και κατακόρυφη αντίστοιχα συνιστώσα της B, θα είναι

$$\frac{B_x}{B_y} = \tan 30^\circ \Rightarrow B_x = 0,58 B_y$$

$$(\Sigma M)_{A^{\perp+}} = 0 \Rightarrow \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - 0,58 B_y \cdot 3 = 0 \Rightarrow \underline{B_y = 5,14 \text{ N}}$$

Άρα: $B_x = 2,98 \text{ N}$

και συνεπώς **$B = 5,94 \text{ N}$** .

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 4 + 5,14 = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 2,86 \text{ N}}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + \frac{4,5 \cdot 3}{2} - 2,98 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 3,77 \text{ N}}$$

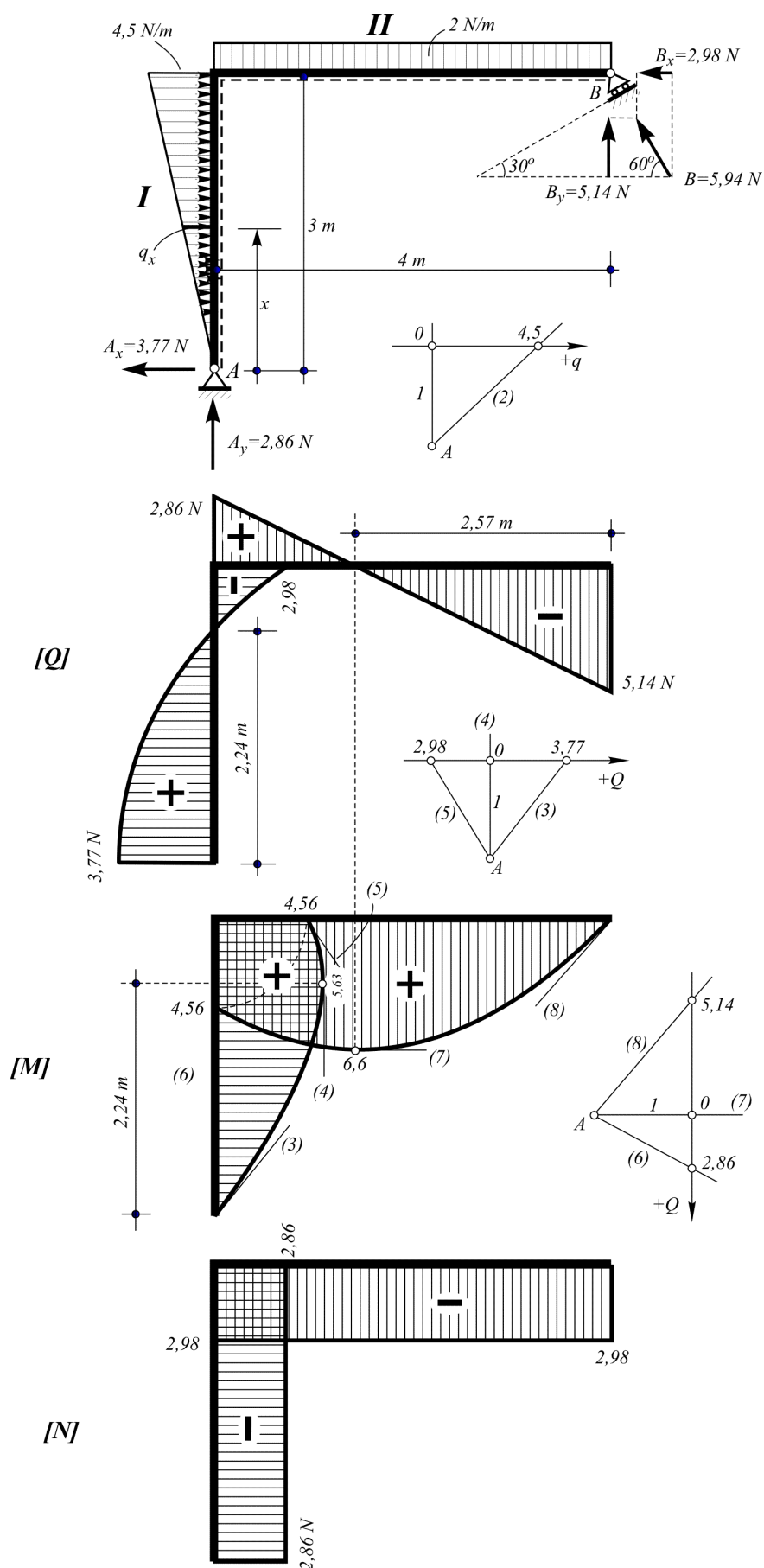
$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_{B^{\perp+}} = 3,77 \cdot 3 - \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5,14 \cdot 4 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε διατομή που απέχει απόσταση x από το A, θα είναι:

$$\frac{q_x}{4,5} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = 1,5x.$$



Σχ. 6_23 Διαγράμματα Q , M αμφιερέιστου πλαισίου

$$\text{Άρα: } Q_I = 3,77 - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3,77 - \frac{1,5x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\chi} = 3,77 \text{ N},$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_F^{ap} = -2,98 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_I = 0 \text{ για } x^2 = 3,77 \cdot 2 / 1,5 \text{ ή } x = \pm 2,24 \text{ m}.$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του τμήματος.

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ.

$$Q_{II} = -5,14 + 2x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -5,14 \text{ N},$$

$$x = 4 \Rightarrow Q_F^{\delta\epsilon\chi} = 2,86 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0 \text{ όταν } 2x = 5,14 \text{ ή } x = 2,57 \text{ m}.$$

Διάγραμμα M

Διαλέγω σα θετικό όριο (κάτω ίνα) του φορέα την εσωτερική πλευρά του πλαισίου, ώστε η ροπή στο Γ, που προέρχεται είτε από το οριζόντιο είτε από το κατακόρυφο σκέλος, να έχει, εκτός από την ίδια τιμή και το ίδιο πρόσημο. Με τον τρόπο αυτό διατηρείται ομοιομορφία και στη σήμανση των διαγραμμάτων (Q) και (N).

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 3$)

$$M_I = 3,77x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 3,77x - \frac{x^3}{4}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_F = 4,56 \text{ Nm}.$$

$$\text{Για } x = 2,24 \text{ m, είναι } M_{I \max} = 5,63 \text{ Nm}.$$

Τμήμα II ($0 \leq x \leq 4$) από δεξ.

$$M_{II} = 5,14x - 2x \cdot \frac{x}{2} = 5,14x - x^2.$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x = 4 \Rightarrow M_F = 4,56 \text{ Nm}.$$

$$\text{Για } x = 2,57 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 6,6 \text{ Nm}.$$

Διάγραμμα N

Εδώ ο χωρισμός του φορέα σε τμήματα, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με μοναδικό κριτήριο την ύπαρξη συγκεντρωμένων δυνάμεων που δρουν αξονικά στο φορέα, δηλαδή δυνάμεων που είναι παράλληλες στον άξονά του.

Σπανιότατα είναι δυνατόν να εμφανιστεί συνεχές φορτίο που να δρα κατά την έννοια του άξονα του φορέα, οπότε η περίπτωση του αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Με το παραπάνω σκεπτικό, ο χωρισμός του φορέα στα τμήματα I και II που έγινε για τα διαγράμματα (Q) και (M), ισχύει και για το διάγραμμα (N).

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

$$N_I = -A_y = -2,86 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ.

$$N_{II} = -B_x = -2,98 \text{ N σταθ.}$$

6.10 – Γενικές παρατηρήσεις

1. Στο διάγραμμα (M), όταν από **αφόρτιστη** περιοχή του φορέα μεταβαίνουμε σε **συνεχώς** φορτισμένη χωρίς την παρεμβολή συγκεντρωμένου φορτίου, τότε η ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στην αφόρτιστη περιοχή, είναι μαζί και εφαπτομένη του καμπύλου τμήματος που αντιστοιχεί στο φορτισμένο τμήμα του φορέα (δείτε διάγραμμα $M_{II} - III$ των παραδειγμάτων 1 και 3)

2. Η ύπαρξη συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης σε ακραία ή ενδιάμεση θέση συνεχούς φορτίου, αν και δε διασπά την τιμή της καμπτικής ροπής στη θέση της δύναμης, δημιουργεί στο διάγραμμα γωνία υπό μορφή ακίδος, που οφείλεται στις δύο εφαπτόμενες εκατέρωθεν της διατομής όπου δρα η δύναμη.

3. Στο διάγραμμα (Q), όταν από τριγωνική φόρτιση μεταβαίνουμε σε αφόρτιστο τμήμα του φορέα που συνορεύει με την κορυφή του τριγωνικού φορτίου **χωρίς** τη μεσολάβηση κατακόρυφης δύναμης, τότε η οριζόντια ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στο αφόρτιστο τμήμα είναι μαζί και εφαπτομένη του παραβολικού τμήματος της φορτισμένης περιοχής (δείτε διάγραμμα $Q_{II} - III$ του παραδείγματος 3).

4. Όταν στο όριο μεταξύ δύο τμημάτων δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, τότε η τιμή της Q ή M αντίστοιχα που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων στα γειτονικά τμήματα είναι πάντα η ίδια (επαλήθευση).

6.11 – Δυσμενείς φορτίσεις

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο, ο φορέας πρέπει να μελετηθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να μπορεί να αναλάβει τα προβλεπόμενα φορτία σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους, ειδικά εκείνους που προκαλούν δυσμενέστερες καταπονήσεις.

Τα φορτία που κατά πάγια τακτική αναλαμβάνει ένας φορέας είναι:

1. Το δικό του (ίδιο) βάρος που θεωρείται μόνιμο φορτίο (g)
2. Το ωφέλιμο ή κινητό φορτίο (p) και
3. Το φορτίο χιονιού (s).

Η σύγχρονη δράση των παραπάνω φορτίων που ονομάζονται **κύρια**, συνιστούν τη λεγόμενη φόρτιση (**H**) του φορέα.

Πέρα όμως από τα κύρια φορτία, ένας φορέας μπορεί να αναλαμβάνει και **πρόσθετα φορτία**, δηλαδή φορτία που προέρχονται από:

1. Ανεμοπίεση (w)
2. Μεταβολή της θερμοκρασίας και
3. Δυνάμεις πεδήσεως (φρένων).

Η σύγχρονη δράση των κύριων και πρόσθετων φορτίων, συνιστούν την ονομαζόμενη φόρτιση (**HZ**).

Τα κτιριακά έργα επιβαρύνονται συνήθως με φόρτιση **H**, ενώ οι γέφυρες με **HZ**.

Στη μελέτη ενός φορέα, τα φορτία που συνδυάζονται μεταξύ τους για να δώσουν τις δυσμενέστερες καταπονήσεις, είναι:

α) Τα μόνιμα φορτία (g), που δεν μεταβάλλονται και συνεπώς προκαλούν φόρτιση του φορέα σε όλο το μήκος του και

β) Τα κινητά ή ωφέλιμα φορτία (p), που μπορούν να κινούνται κατά μήκος του φορέα και συνεπώς να τον επιβαρύνουν διαφορετικά, ανάλογα με τη θέση που έχουν την κάθε φορά.

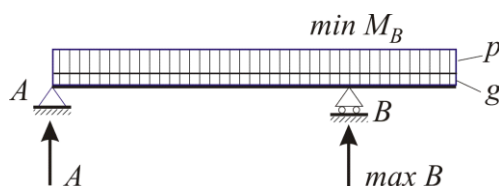
Όταν ο φορέας φορτίζεται σε **όλο** του το μήκος, με φορτίο $q = g + p$, θα λέμε ότι υφίσταται **καθολική φόρτιση**. Όταν όμως ένα τμήμα του φορτίζεται με q ενώ το υπόλοιπο με g , η φόρτιση ονομάζεται **μερική**, και μπορεί να αποτελέσει μια περίπτωση δυσμενούς φορτίσεως.

Στην **αμφιέρεστη** δοκό οι μέγιστες αντιδράσεις στήριξης και οι μέγιστες καμπτικές ροπές προκύπτουν για καθολική φόρτιση q .

Στη **μονοπροέχουσα** δοκό, επειδή η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση στην ακραία στήριξη αλλά και την καμπτική ροπή στο άνοιγμα, οι μέγιστες τιμές υπολογίζονται για μερική φόρτιση στο τμήμα του προβόλου.

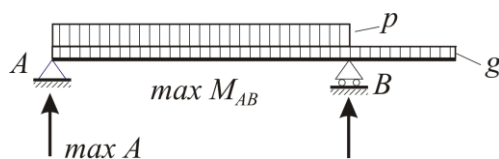
Ανάλογα με τη θέση που έχει το ομοιόμορφο κινητό φορτίο πάνω στη μονοπροέχουσα δοκό, προκύπτουν οι παρακάτω 3 περιπτώσεις φορτίσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στα 3 επόμενα σχήματα, 6_24, 6_25, και 6_26, σε καθένα από τα οποία παρουσιάζεται η ακρότατη τιμή του στατικού φορτίου:

1) Καθολική φόρτιση: Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εσωτερικής στήριξης ($\max B$) και την ελάχιστη (απόλυτα μέγιστη) αρνητική ροπή στη στήριξη του προβόλου ($\min M_B$).



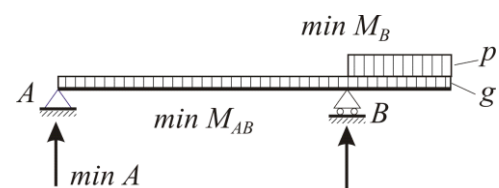
Σχ. 6_24

2) Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα: Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ($\max A$) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ($\max M_{AB}$).



Σχ. 6_25

3) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο: Προκαλεί την ελάχιστη ροπή στο άνοιγμα ($\min M_{AB}$) και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ($\min A$). Αν η αντίδραση προκύψει αρνητική, τότε πρέπει η δοκός να αγκυρώνεται στη στήριξη.

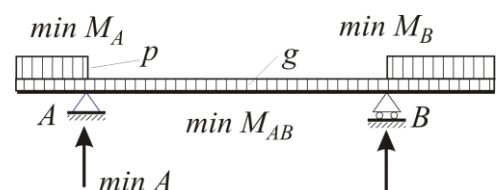


Σχ. 6_26

Στην αμφιπροέχουσα δοκό, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των αντιδράσεων και ροπών δεν προκύπτουν για καθολική φόρτιση όπως στην αμφιέρειστη αλλά για μερική φόρτιση της δοκού από τα κινητά φορτία.

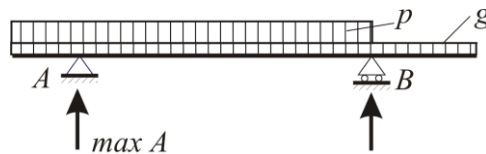
Όμως επειδή υπάρχουν δύο πρόβολοι, οι περιπτώσεις φόρτισης που μπορούν να συνδυαστούν είναι 6 και παρουσιάζονται αντίστοιχα στα επόμενα 6 σχήματα, 6_27, 6_28, 6_29, 6_30, 6_31 και 6_32. Σημειώνεται ότι στη μονοπροέχουσα ήταν μόνο τρεις. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

1) Φόρτιση δύο προβόλων: Προκύπτει: $\min M_A$, $\min M_B$, $\min M_{AB}$.



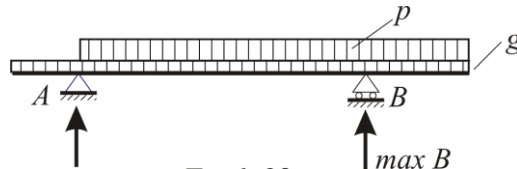
Σχ. 6_27

2) Φόρτιση ανοίγματος και αριστερού προβόλου: Προκύπτει η $\max A$.



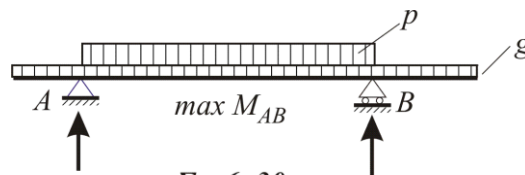
Σχ. 6_28

3) Φόρτιση ανοίγματος και δεξιού προβόλου: Προκύπτει η $\max B$.



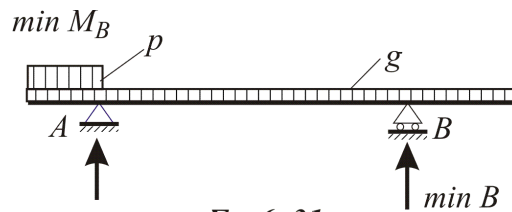
Σχ. 6_29

4) Φόρτιση μόνο ανοίγματος: Προκύπτει η $\max M_{AB}$.



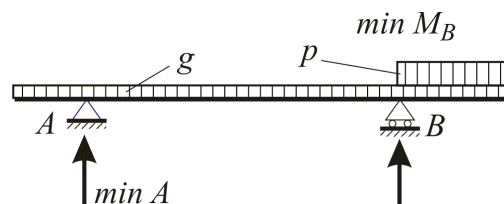
Σχ. 6_30

5) Φόρτιση μόνο αριστερού προβόλου: Προκύπτει $\min M_A$ και $\min B$.



Σχ. 6_31

6) Φόρτιση μόνο δεξιού προβόλου: Προκύπτει $\min M_B$ και $\min A$.



Σχ. 6_32

Κεφάλαιο 7°

Επίπεδοι δικτυωτοί φορείς

Θα ονομάζουμε **δικτυωτό φορέα** ή **απλά δικτύωμα**, μια κατασκευή που αποτελείται από ράβδους οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους.

Βασικό στοιχείο των φορέων αυτών είναι οι ράβδοι, στις οποίες προέχει μόνο η διάσταση του μήκους, ως προς την οποία μπορούν να αναλάβουν φορτία.

Τα σημεία στα οποία συντρέχουν δύο ή περισσότερες ράβδοι ονομάζονται **κόμβοι** του δικτύωματος και υπολογίζονται σαν αρθρώσεις.

Τα εξωτερικά φορτία, που είναι συγκεντρωμένες δυνάμεις, εφαρμόζονται πάντα στους κόμβους, είτε κατ' ευθείαν (άμεση φόρτιση), είτε ύστερα από μεταβίβαση (έμμεση φόρτιση).

Τα δικτύωματα είναι φορείς που συναντώνται συχνά στην πράξη σε περιπτώσεις γεφυρών, υπόστεγων και γενικά κατασκευών μεγάλων ανοιγμάτων. Ανάλογα με τη διάταξη των ράβδων τους οι δικτυωτοί φορείς διακρίνονται:

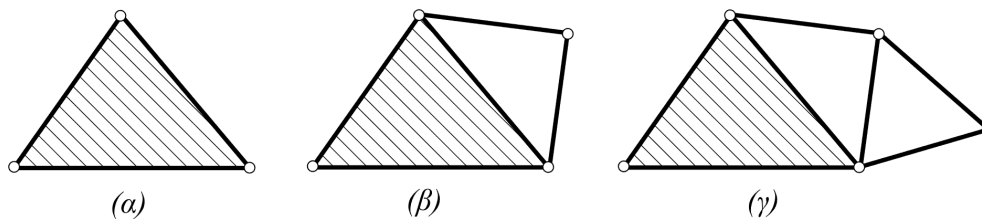
α) στους **επίπεδους**, όπου τόσο οι κόμβοι όσο και τα εξωτερικά φορτία κείνται στο ίδιο επίπεδο και

β) στους **χωρικούς**, όπου ράβδοι και φορτία έχουν τυχαία θέση στο χώρο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα επίπεδα δικτύωματα, με τα οποία και θ' ασχοληθούμε. Διακρίνονται σε απλά και σύνθετα.

Απλά είναι εκείνα που προκύπτουν από το λεγόμενο **Θεμελιώδη τριγωνικό δίσκο** (σχήμα α), που είναι τρεις ράβδοι συνδεόμενες αρθρωτά σε τρίγωνο, αν κάθε φορά προστίθεται νέος κόμβος μέσω δύο ράβδων που δεν κείνται στην ίδια ευθεία (σχήμα β και γ).

Σύνθετα είναι εκείνα που προκύπτουν από τη σύνδεση δύο ή περισσότερων δίσκων, είτε κατ' ευθείαν, μέσω αρθρώσεων, είτε μέσω ράβδων που δεν είναι παράλληλες ούτε συντρέχουσες, είτε με άλλους συνθετότερους τρόπους.



Σχ. 7_1 Μόρφωση δικτυώματος

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, κάθε ράβδος, σα δεσμικό στοιχείο του δικτυώματος που βρίσκεται μεταξύ δύο κόμβων όπου ασκούνται συγκεντρωμένες δυνάμεις, αναλαμβάνει φορτία μόνο κατά την έννοια του μήκους της, και επομένως καταπονείται **αξονικά** (σε θλίψη ή εφελκυσμό).

Το πρόβλημα συνεπώς που εμφανίζεται στα επίπεδα δικτυώματα είναι ο προσδιορισμός της αξονικής αυτής δύναμης που αναπτύσσεται σε κάθε ράβδο, τόσο σαν ένταση όσο και σαν είδος (εφελκυσμός ή θλίψη).

Για να είναι εκμεταλλεύσιμη μια δικτυωτή κατασκευή θα πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις:

α) Να είναι **σταθερή** ή **γεωμετρικά ορισμένη**. Τούτο σημαίνει ότι ο αριθμός των ράβδων της θα πρέπει να είναι **ορισμένος** σε σχέση με τον αριθμό των κόμβων της. Γιατί αφαίρεση ακόμη και μιας ράβδου έχει σαν αποτέλεσμα να αποκτά **κινητότητα** ο φορέας, ή όπως θα λέμε, μετατρέπεται σε **μονοτρόχιο μηχανισμό**.

β) Να είναι **στατικά ορισμένος**, δηλαδή να είναι δυνατός ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων της. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει ο αριθμός των ράβδων του δικτυώματος να έχει **συγκεκριμένη** τιμή, που εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων του. Αν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από εκείνη που για το φορέα είναι στατικά απαραίτητη, τότε το δικτύωμα χαρακτηρίζεται **στατικά αόριστο** με βαθμό στατικής αοριστίας τον αριθμό των πλεοναζουσών ράβδων.

Για να πληρούνται και οι δύο αυτές προϋποθέσεις, δηλαδή για να είναι ένα δικτύωμα **στατικά ορισμένο και σταθερό**, θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\rho_{\varepsilon\sigma} + \rho_{\varepsilon\zeta} = 2\kappa,$$

όπου: $\rho_{\varepsilon\sigma}$ είναι ο αριθμός των εσωτερικών ράβδων του δικτυώματος, δηλαδή αυτές από τις οποίες αποτελείται το δικτύωμα,

$\rho_{\varepsilon\zeta}$ είναι ο αριθμός των εξωτερικών ράβδων, που θεωρούνται απαραίτητες για τη στήριξη του δικτυώματος και είναι πάντα τρεις (2 για άρθρωση και 1 για κύλιση) και

κ είναι ο αριθμός των κόμβων του δικτυώματος.

Αν το δικτύωμα είναι στο χώρο, θα πρέπει αντίστοιχα να είναι:

$$\rho_{\varepsilon\sigma} + \rho_{\varepsilon\xi} = 3\kappa.$$

Για την επίλυση των δικτυωμάτων επισημαίνεται ότι:

α) το ίδιο (νεκρό) βάρος των ράβδων του θεωρείται αμελητέο.

β) Δικτυώματα που είναι γεωμετρικά **όμοια** και δέχονται **ίσες** δυνάμεις σ' αντίστοιχους κόμβους, θα εμφανίζουν ίσες δυνάμεις και στις αντίστοιχες **ράβδους**. Τούτο σημαίνει ότι η ένταση των ράβδων ενός δικτυώματος δεν εξαρτάται από το πραγματικό του μέγεθος, αλλά από την ένταση των εξωτερικών φορτίων και τη γεωμετρία του.

Ο υπολογισμός της δύναμης κάθε ράβδου γίνεται για να καθοριστεί μετά η **απαραίτητη** διατομή της, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται ταυτόχρονα:

- i) **οικονομία** στο υλικό του φορέα
- ii) **ασφάλεια** στη λειτουργία του.

Για την επίλυση των επιπέδων δικτυωμάτων, δηλαδή τον προσδιορισμό των δυνάμεων που αναπτύσσονται στις ράβδους του, χρησιμοποιούνται κυρίως οι παρακάτω μέθοδοι:

1. Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων.
2. Η γραφική μέθοδος του διαγράμματος Cremona.
3. Η αναλυτική μέθοδος των τομών ή μέθοδος Ritter.

7.1 – Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων

Η χρήση της μεθόδου αυτής είναι περιορισμένη και εφαρμόζεται κυρίως όταν οι γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ των οι ράβδοι του δικτυώματος και τα εξωτερικά φορτία είναι τέτοιες που να δίνουν γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς (30° , 45° , 60°).

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων στις στηρίξεις του δικτυώματος, εξετάζουμε αναλυτικά την ισορροπία κάθε κόμβου του, ξεκινώντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν μέχρι δύο άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Αυτό γίνεται επειδή οι εξισώσεις που διατίθενται για να εκφράσουμε την ισορροπία κάθε κόμβου, με το σύστημα των ορθογωνίων συντεταγμένων που εγκαθιστούμε νοητά σ' αυτόν, είναι δύο:

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \quad \text{και} \quad \sum y^{\uparrow} = 0$$

Η εξίσωση $(\sum M)^{\perp} = 0$ δεν έχει νόημα αφού οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες και ο κόμβος θεωρείται σαν άρθρωση.

Κατά την εισαγωγή της άγνωστης δύναμης μιας ράβδου η φορά της ορίζεται αυθαίρετα.

Το θετικό ή αρνητικό πρόσημο που προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων δηλώνει αντίστοιχα τη σωστή ή λανθασμένη επιλογή της φοράς.

Παρατήρηση: Όταν σε κόμβο συντρέχουν:

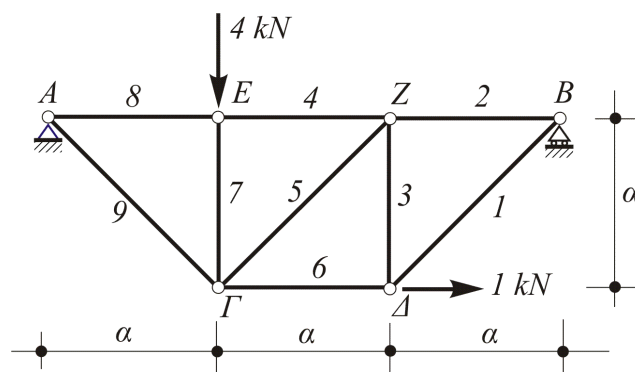
α) δύο ράβδοι ή δυνάμεις που κείνται επ' ευθείας

β) μία τρίτη ράβδος λοξή ή κάθετη,

τότε η δύναμη της τρίτης ράβδου είναι πάντα μηδενική ενώ οι άλλες δύο είναι ίσες και αντίθετες. Η όλη διαδικασία της μεθόδου φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

7.1.1 – Παράδειγμα

Του εικονιζόμενου στο σχ. 7_2 δικτυωτού φορέα να προσδιοριστούν με την αναλυτική μέθοδο ισορροπίας των κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων του, καθώς και το είδος της κάθε μιας.



Σχ. 7_2

Λύση

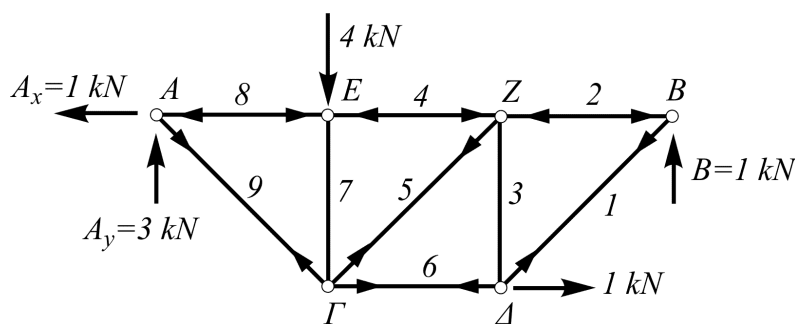
Αντιδράσεις

$$\left(\sum M\right)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 4 \cdot a - 1 \cdot a - B \cdot 3a = 0 \Rightarrow \underline{B = 1 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 4 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 1 \text{ kN}}.$$

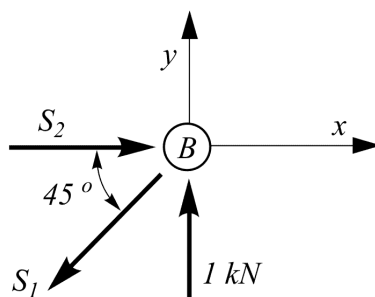
Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων και την κατασκευή του διαγράμματος ελευθέρου σώματος, ξεκινάμε, εξετάζοντας την ισορροπία του κόμβου B, όπου συντρέχουν δύο μόνον άγνωστες δυνάμεις ράβδων.



Σχ. 7_3 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Ισορροπία κόμβου Β

Σχεδιάζουμε τον κόμβο Β με όλες τις γνωστές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτόν (εδώ γνωστή είναι μόνο η $B = 1 \text{ kN}$), εισάγοντας π.χ. την S_1 εφελκυστική και την S_2 θλιπτική.



Σχ. 7_4 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Β

Ξεκινάμε από τη σχέση $\sum y^{\uparrow+} = 0$, για να αποφύγουμε την S_2 :

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_1 \eta \mu 45^\circ = 0 \quad \text{ή} \quad S_1 = \frac{1}{0,707} = +1,41 \text{ kN}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow S_2 - 1,41 \eta \mu 45^\circ = 0 \quad \text{ή} \quad S_2 = 1,41 \cdot 0,707 = +1 \text{ kN}$$

Επειδή τα πρόσημα που βρέθηκαν για τις δυνάμεις S_1 και S_2 είναι θετικά, σημαίνει ότι οι φορές που εκλέχτηκαν είναι σωστές.

Τις σωστές αυτές φορές μεταφέρουμε στο Σχ. 7_3, δίπλα στον κόμβο που εξετάζουμε την ισορροπία του, και στη συνέχεια, σύμφωνα με την αρχή της δράσης - αντίδρασης, σημειώνουμε, σε κάθε ράβδο που υπολογίσαμε, τις αντίθετες φορές δίπλα στον απέναντι κόμβο της.

Τώρα παρατηρούμε ότι η ράβδος 1 εφελκύνει τον κόμβο Β, άρα και η ίδια εφελκύνεται με δύναμη 1,41 kN, οπότε εφελκύνει και τον απέναντι του Β κόμβο Δ, με την ίδια δύναμη.

Καταγράφουμε λοιπόν στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων (που ακολουθεί στο τέλος), το εφελκυστικό αποτέλεσμα της δύναμης για τη ράβδο 1, σαν +1,41 (kN).

Αντίθετα η ράβδος 2 θλίβει τον κόμβο Β, άρα και η ίδια θλίβεται με δύναμη 1 kN, οπότε θλίβει και τον απέναντι του Β κόμβο Ζ, με την ίδια δύναμη.

Το νέο αυτό αποτέλεσμα καταγράφουμε στον πίνακα σαν - 1.

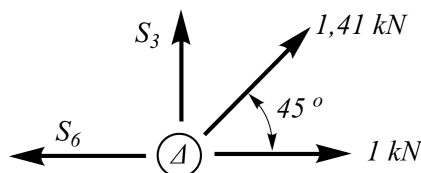
Επειδή στον κόμβο Ζ συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις, πηγαίνουμε υποχρεωτικά στον κόμβο Δ όπου υπάρχουν μόνο δύο και ακολουθούμε την ίδια πορεία.

Ισορροπία κόμβου Δ

Εδώ εισάγουμε εφελκυστικές και τις δύο άγνωστες δυνάμεις S_3 και S_6 , οπότε έχουμε:

$$\sum x^+ = 0 \Rightarrow -S_6 + 1,41 \cdot \eta\mu 45^\circ + 1 = 0 \Rightarrow \underline{S_6 = + 2 \text{ kN}}$$

$$\sum y^+ = 0 \Rightarrow S_3 + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_3 = - 1 \text{ kN}}$$



Σχ. 7_5 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Δ

Ενώ το θετικό πρόσημο της S_6 σημαίνει τη σωστή εφελκυστική φορά της, το **αρνητικό** πρόσημο της S_3 σημαίνει ότι η σωστή της φορά είναι **αντίθετη** της εφελκυστικής που εκλέχτηκε, δηλαδή ότι είναι **θλιπτική**.

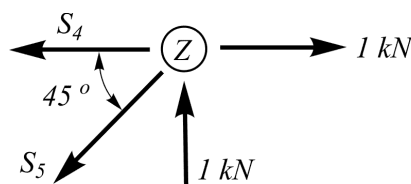
Μεταφέροντας τις σωστές φορές στο Σχ. 7_3 και τις αντίθετές τους στους απέναντι κόμβους, μετά τη διαπίστωση του εφελκυσμού στη ράβδο 6 και της θλίψης στη ράβδο 3, καταγράφουμε στον πίνακα τα αποτελέσματα σαν + 2 και - 1 αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Από την παραπάνω διεργασία γίνεται σαφές ότι, όταν αρχικά παίρνουμε μια άγνωστη δύναμη σαν εφελκυστική τότε το **πρόσημο που προκύπτει** από την επίλυση της εξίσωσης **εκφράζει κατ' ευθείαν την πραγματική εντατική κατάσταση της ράβδου**.

Το αντίθετο συμβαίνει αν αρχικά πάρουμε την άγνωστη δύναμη σαν θλιπτική.

Ισορροπία κόμβου Ζ

Όμοια, από το αντίστοιχο σχήμα έχουμε:



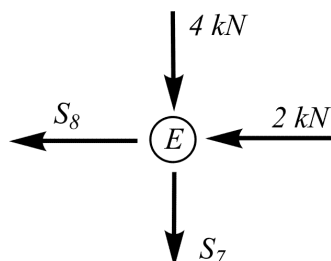
Σχ. 7_6 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Ζ

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_5 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_5 = +1,41 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_4 - 1,41 \cdot \eta\mu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_4 = -2 \text{ kN}}.$$

Ισορροπία κόμβου Ε

Από το αντίστοιχο σχήμα έχουμε:



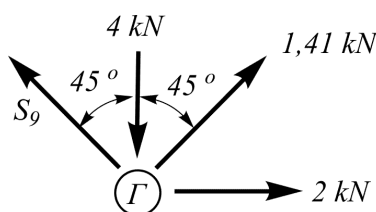
Σχ. 7_7 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Ε

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_8 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{S_8 = -2 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -S_7 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{S_7 = -4 \text{ kN}}$$

Ισορροπία κόμβου Γ

Επειδή εδώ έχουμε μία μόνο άγνωστη δύναμη, η άλλη εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί αν επαλήθευση.



Σχ. 7_8 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Γ

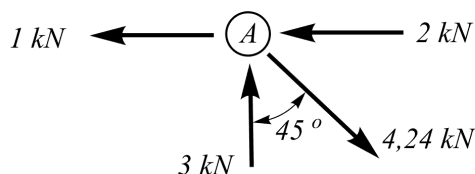
$$\begin{aligned} \sum x^{\rightarrow+} = 0 &\Rightarrow -S_9 \cdot \eta\mu 45^\circ + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + 2 = 0 \\ &\Rightarrow \underline{S_9 = (1 + 2)/0,707 = +4,24 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Επαλήθευση: $\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ - 4 + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 3 - 4 + 1 = 0!$

Ισορροπία κόμβου Α (Επαλήθευση)

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -1 + 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ - 2 = -1 + 3 - 2 = 0!$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 3 - 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 3 - 3 = 0!$$



Σχ. 7_9 Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Α

Πίνακας δυνάμεων των ράβδων

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	+1,41	-1	-1	-2	+1,41	+2	-4	-2	+4,24

Έτσι ολοκληρώθηκε η εικόνα που παρουσιάζει την εντατική κατάσταση κάθε ράβδου του δικτύματος, με την παρατήρηση, ότι για κάθε ράβδο, η πραγματική της εντατική κατάσταση είναι αντίθετη από αυτή που φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Για παράδειγμα η ράβδος 2, ενώ φαίνεται ότι εφελκύεται, ουσιαστικά θλίβεται, επειδή όπως αναφέραμε θλίβει τους κόμβους στα άκρα της.

Η επαλήθευση που γίνεται στο τέλος δεν αποτελεί μέρος της επίλυσης του δικτύματος και γι αυτό δεν είναι υποχρεωτική. Όμως όταν γίνεται και ισχύει, δείχνει ότι τόσο οι αντιδράσεις του δικτύματος όσο και οι δυνάμεις των ράβδων του έχουν υπολογιστεί σωστά.

Έτσι ο μελετητής αποκτά την απαραίτητη σιγουριά για τους υπολογισμούς που έκανε, ώστε να προχωρήσει μετά στο βασικό σκοπό, που είναι ο καθορισμός της διατομής κάθε ράβδου.

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για επαλήθευση, στην ουσία περίσσεψαν από τις διατιθέμενες εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του δικτύματος, λόγω της χρήσης των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας, για τον υπολογισμό των αντιδράσεων.

Πραγματικά, σε δίκτυμα k κόμβων, αν στον αριθμό $2k-3$ των δυνάμεων των ράβδων που πρέπει να υπολογιστούν, προσθέσουμε τις 3 αντιδράσεις στήριξης που εμφανίζονται στους ισοστατικούς φορείς, προκύπτουν συνολικά $2k - 3 + 3 = 2k$ άγνωστες δυνάμεις, οι οποίες θα υπολογιστούν κανονικά από τις $2k$ εξισώσεις που θα προκύψουν λόγω της ισορροπίας των k κόμβων ($\sum x^{\rightarrow} = 0, \sum y^{\uparrow} = 0$).

Ο λόγος για τον οποίο προσδιορίζουμε πρώτα τις αντιδράσεις ενός δικτύματος είναι για να βρεθεί κόμβος που να συντρέχουν μόνο 2 άγνωστες δυνάμεις, αφού στον κόμβο της στήριξης η αντίδραση δεν παύει να είναι μια άγνωστη δύναμη.

7.2 – Η γραφική μέθοδος Cremona

Η μέθοδος αυτή ασχολείται ουσιαστικά με τη γραφική έκφραση της ισορροπίας του κάθε κόμβου, ενοποιώντας όμως όλα τα επί μέρους δυναμοπολύγωνα που προκύπτουν από την εργασία αυτή σε ένα, που είναι γνωστό σαν **διάγραμμα Cremona**.

Αν και γραφική, η μέθοδος αυτή οδηγεί σε γρήγορο υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων και προσφέρεται ιδιαίτερα στις περιπτώσεις, όπου, εξωτερικά φορτία και ράβδοι του δικτυώματος σχηματίζουν τυχαίες γωνίες.

Προκειμένου να εξετάσουμε γραφικά την ισορροπία ενός κόμβου όπου συντρέχουν 3 δυνάμεις εκ των οποίων η μία είναι πλήρως γνωστή ενώ οι άλλες δύο είναι γνωστές μόνο κατά διεύθυνση, αφού σχεδιάσουμε τη γνωστή δύναμη, **από τα δύο άκρα της** φέρνουμε παράλληλες προς τις **δύο** γνωστές διευθύνσεις, οπότε το κλείσιμο του δυναμοτριγώνου που προκύπτει, μας δίνει τις φορές και τις εντάσεις των δύο αγνώστων δυνάμεων.

Σημειώνεται ότι η πλήρως γνωστή δύναμη μπορεί να θεωρηθεί και σαν συνισταμένη άλλων γνωστών δυνάμεων. Συνεπώς, όπως και στην αναλυτική μέθοδο, μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, εξετάζουμε γραφικά την ισορροπία κάθε κόμβου, αρχίζοντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν **μέχρι δύο** άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σε σχέση με την αναλυτική μέθοδο, η γραφική είναι λιγότερο ακριβής, αλλά αυτή η μικρότερη ακρίβεια είναι τόσο ασήμαντη που δεν εμποδίζει καθόλου τη χρησιμοποίηση της μεθόδου από τους μελετητές, επειδή διακρίνεται για την ταχύτητα, την κομψότητα και προ παντός τη μικρή πιθανότητα λάθους, που είναι αποτέλεσμα των πολλαπλών επαληθεύσεων που εμφανίζονται στην πορεία.

Στην όλη οργάνωση της μεθόδου και ιδιαίτερα στην ονομασία των δυνάμεων που προκύπτουν για κάθε ράβδο, σημαντική υπήρξε η συμβολή του **Bow** και γι αυτό η όλη εργασία είναι γνωστή και σαν μέθοδος Bow - Cremona.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφονται αναλυτικά τα διάφορα στάδια της μεθόδου, δίνοντας την εντύπωση ότι πρόκειται για πολύπλοκη εργασία. Όμως, μετά την απόκτηση κάποιας εμπειρίας, τα στάδια αυτά ακολουθούνται μηχανικά, με αποτέλεσμα η επίλυση του δικτυώματος, όπως προαναφέραμε, να γίνεται πολύ γρήγορα και προπαντός σίγουρα.

7.2.1 – Παράδειγμα

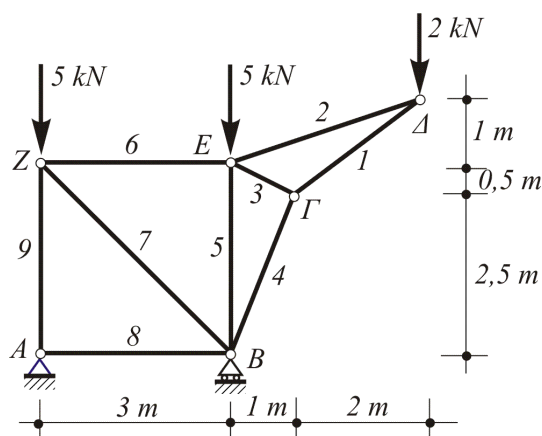
Του δικτυωτού φορέα που εικονίζεται στο σχ 7_10, να προσδιοριστούν γραφικά με τη μέθοδο Cremona οι δυνάμεις των ράβδων του καθώς και το είδος της κάθε μιας. Να γίνει στο τέλος και επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

Λύση

Αντιδράσεις

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - B \cdot 3 = 0 \Rightarrow \underline{B = 9 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 5 - 5 + 9 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{A = 3 \text{ kN}}$$



Σχ. 7_10

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, κατασκευάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και ακολουθούμε τις παρακάτω εργασίες.

α) Ορίζουμε μια φορά διαγραφής, π.χ. δεξιόστροφη, των δυνάμεων που εμφανίζονται γύρω από κάθε κόμβο. Τούτο σημαίνει ότι αν κατά την εξέταση π.χ. της ισορροπίας του κόμβου Ε ξεκινήσουμε την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου παίρνοντας τη δύναμη της ράβδου 2, η επόμενη δύναμη που θα λάβουμε υπόψη, θα είναι υποχρεωτικά της ράβδου 3, που εμφανίζεται πρώτη δεξιόστροφα, και όχι των 5 kN ή της ράβδου 5 ή της ράβδου 6.

β) Καλύπτοντας όλο το επίπεδο του σχήματος ονομάζουμε α, β, γ... όλες τις επιφάνειες που δημιουργούνται τόσο από τις ράβδους του δικτυώματος όσο και από τα εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις, έτσι ώστε κάθε δύναμη, αντίδραση ή ράβδος να χωρίζει δύο επιφάνειες.

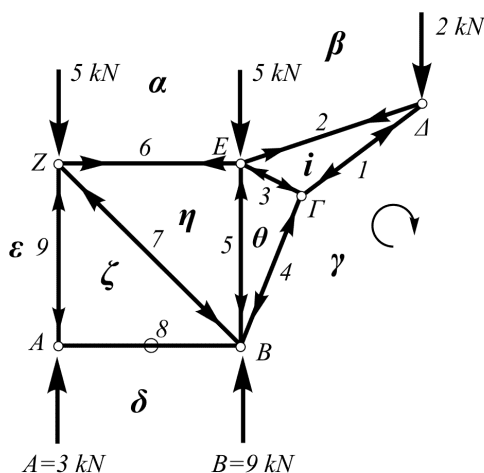
γ) Αρχίζουμε με κόμβο όπως ο Δ, όπου συντρέχουν δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις ράβδων και εξετάζουμε την ισορροπία του, ξεκινώντας την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου (εδώ είναι δυναμοτριγώνου), από τις γνωστές δυνάμεις, έτσι ώστε να καταλήγουμε πάντα στις δύο άγνωστες.

Κόμβος Δ

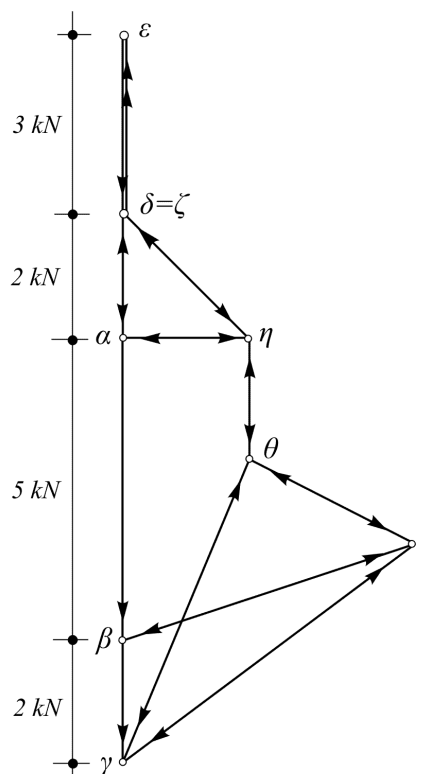
Σχεδιάζουμε λοιπόν με συγκεκριμένη κλίμακα, π.χ. 1 μονάδα μήκους (έστω 1 cm) $\nless 1$ kN, (σχήμα β) τη γνωστή δύναμη των 2 kN, η οποία χαρακτηρίζεται με το διάνυσμα $\vec{\beta\gamma}$, διότι, περιστρεφόμενοι δεξιόστροφα γύρω από τον κόμβο Δ, προκειμένου να περάσουμε **πάνω** από τη δύναμη των 2 kN, πρέπει να πατήσουμε **πρώτα** στην επιφάνεια β και **μετά** στη γ.

Συνεχίζοντας δεξιόστροφα συναντάμε τη ράβδο 1, που σύμφωνα με τα παραπάνω ασκεί στον κόμβο Δ τη δύναμη γi , από τις επιφάνειες γ και i που διαχωρίζει.

Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona από το γ την παράλληλη της ράβδου 1 και πάνω σ' αυτή **περιμένουμε** το σημείο i.



(α) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



(β) Διάγραμμα Cremona

Σχ. 7_11 Γραφική επίλυση με τη μέθοδο Cremona

Συνεχίζοντας τη διαδρομή συναντάμε τη ράβδο 2, που ασκεί στον κόμβο Δ τη δύναμη $i\beta$.

Επειδή το σημείο i δεν είναι ακόμη γνωστό, φέρνουμε στο διάγραμμα από το σημείο β την παράλληλη της ράβδου 2, που φυσικά τέμνει την εκ του γ παράλληλη της 1 (που φέραμε πριν), στο σημείο i .

Μετά τον ορισμό του i , η ισορροπία του κόμβου Δ εκφράζεται με το δυναμοτρίγωνο $\beta\gamma i\beta$. Για το κλείσιμό του ακολουθούμε τη διαδρομή που προκύπτει από τα ονόματα των επιφανειών που αντιστοιχούν στη δεξιόστροφη περιφορά γύρω από τις **δύο τελευταίες** άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή τη διαδρομή $\gamma i\beta$, βάζοντας τα βελάκια της κίνησης στο **τέλος** της διαδρομής κάθε δύναμης.

Τα βελάκια αυτά, που εκφράζουν τις **σωστές φορές** των αγνώστων δυνάμεων, μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους (σχήμα α), **πλάι** στον κόμβο Δ , που εξετάζουμε την ισορροπία του.

Αντίθετες φορές θέτουμε στους απέναντι του Δ κόμβους, Γ και E .

Τώρα βλέπουμε (σχ. α) ότι η ράβδος 1 π.χ. **θλίβει** τον κόμβο Δ με δύναμη, που βρίσκουμε από το διάγραμμα Cremona, αν μετρήσουμε με το υποδεκάμετρο το τμήμα γi (ή $i\gamma$), σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε.

Έτσι βρίσκουμε $\gamma i = 6$ μονάδες και συνεπώς στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων που ακολουθεί καταγράφουμε τη δύναμη της ράβδου 1 σαν -6 kN.

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	-6	+5,1	-3,1	-5,4	-2	+2	-2,8	0	-3

Όμοια βρίσκουμε ότι η ράβδος 2 εφελκύει τον κόμβο Δ, με δύναμη $i\beta = 5,1$ kN, την οποία καταγράφουμε σαν $+5,1$ και ερχόμαστε στον κόμβο Γ, επειδή στον Ε υπάρχουν 3 άγνωστες δυνάμεις.

Κόμβος Γ

Για να καταλήξουμε στις δύο άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 3 και 4 (σχ. α), ξεκινάμε τη διαδρομή μας από τη γνωστή δύναμη της ράβδου 1, που είναι τώρα η $i\gamma$.

Γράφουμε λοιπόν (σχήμα β) το βελάκι στο **άδειο** τμήμα του τελικού μήκους $i\gamma$ (επαλήθευση), το οποίο βελάκι **επαληθεύεται** μ' εκείνο που ήδη τοποθετήσαμε στο σχήμα α, σαν αντίθετη φορά στον απέναντι του Δ κόμβο Γ.

Συνεχίζοντας δεξιόστροφα στον κόμβο Γ, συναντάμε τη ράβδο 4, που ασκεί σ' αυτόν τη δύναμη $\gamma\theta$. Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona από το Γ την παράλληλη της ράβδου 4 και πάνω σ' αυτή περιμένουμε το θ .

Στη συνέχεια της διαδρομής, η ράβδος 3 ασκεί στον κόμβο τη δύναμη θi , οπότε από το i φέρνουμε παράλληλη της 3, ορίζοντας έτσι το σημείο θ .

Στο δυναμοτρίγωνο $i\gamma\theta i$, που εκφράζει πια την ισορροπία του κόμβου Γ, διανύουμε τώρα μόνο τη διαδρομή που αντιστοιχεί στις δύο άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή τη $\gamma\theta i$, τοποθετώντας, στο τέλος των δυνάμεων, τα βελάκια των κατευθύνσεων της διαδρομής. Αυτά τα μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους, πλάι στον κόμβο Γ, ενώ στους απέναντι του Γ κόμβους, Ε και Β, μεταφέρουμε τις αντίθετες φορές.

Παρατηρούμε τώρα ότι οι δυνάμεις των ράβδων 4 και 3 είναι θλιπτικές. Μετρώντας στο διάγραμμα Cremona τα μήκη $\gamma\theta$ και θi τις καταγράφουμε στον πίνακα με τις τιμές $-5,4$ και $-3,1$ αντίστοιχα.

Κόμβος Ε

Ξεκινάμε το δυναμοπολύγωνο από τη γνωστή δύναμη $a\beta = 5$ kN. Από το σημείο Β που έχουμε στο διάγραμμα, εύκολα ορίζουμε το α, παίρνοντας κατακόρυφα προς τα πάνω μήκος $\beta\alpha = 5$ μονάδες.

Συνεχίζοντας την περιστροφή στον κόμβο, συναντάμε τη γνωστή δύναμη βi της ράβδου 2, οπότε, πηγαίνοντας στο διάγραμμα βρίσκουμε στο τέλος του μήκους βi τον κενό χώρο για να βάλουμε το βελάκι της

κατεύθυνσης, που επαληθεύεται μ' εκείνο που βάλαμε ήδη στο σχήμα α σαν αντίθετη φορά, από τη ισορροπία του κόμβου Δ.

Κατά τον ίδιο τρόπο επαληθεύουμε τη φορά της γνωστής δύναμης $i\theta$ της ράβδου 3.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, από το θ του σχ. β φέρνουμε την παράλληλη της ράβδου 5, που τέμνει την εκ του α παράλληλη της 6 στο η .

Καλύπτουμε στο διάγραμμα Cremona τη διαδρομή $\theta\eta\alpha$, θέτοντας στο τέλος κάθε κατεύθυνσης τα βελάκια, τα οποία μεταφέρουμε πλάι στον κόμβο στις ράβδους 5 και 6 και μετά τα απέναντι αντίθετά τους.

Μετρούμε στο διάγραμμα Cremona τα νέα μήκη $\theta\eta$ και $\eta\alpha$, και, παρατηρώντας τον κόμβο Ε, τι παθαίνει από τις δυνάμεις των ράβδων 5 και 6, τις καταγράφουμε στον πίνακα σαν -2 και +2 αντίστοιχα.

Κόμβος Ζ

Με παρόμοιο τρόπο τοποθετούμε στο διάγραμμα τη δύναμη $\vec{\varepsilon\alpha} = 5 \text{ kN}$ ορίζοντας το ε , και επαληθεύουμε τη δύναμη $\alpha\eta$ της ράβδου 6.

Από το η φέρνουμε παράλληλη της 7, που τέμνει την από το Ε παράλληλη της 9 στο σημείο ζ .

Η διαδρομή $\eta\zeta$ ορίζει τη δύναμη -2,8 της ράβδου 7, ενώ η διαδρομή $\zeta\varepsilon$ που είναι **διπλή** (σημειώνεται για διευκόλυνση με διπλή γραμμή), ορίζει τη δύναμη -3 της ράβδου 9.

Κόμβος Α

Μεταφερόμενοι ήδη στον κόμβο Α περιμένουμε να συναντήσουμε το μηδενισμό της δύναμης στη ράβδο 8, σύμφωνα με το σκεπτικό της παρατήρησης της ενότητας 7.1.

Πραγματικά, τοποθετώντας στο διάγραμμα τη γνωστή αντίδραση $A = \vec{\delta\varepsilon} = 3 \text{ kN}$, ορίζουμε το γράμμα δ σε σημείο που ανήκει στην εκ του ε κατακόρυφη σε απόσταση 3 μονάδων προς τα κάτω. Επειδή όμως η δύναμη $\varepsilon\zeta$ της κατακόρυφης ράβδου 9 υπολογίστηκε ήδη σε 3 kN, έπεται ότι το δ **συμπίπτει** με το ζ. Άρα η δύναμη της ράβδου 8, που εκφράζεται με το μήκος $\zeta\delta$ (που είναι σημείο), είναι μηδενική.

Κόμβος Β

Η διαδικασία των γραφικών ισορροπιών θα ολοκληρωθεί στον κόμβο Β με την επαλήθευση της γνωστής ήδη αντίδρασης Β, τόσο για την ένταση, όσο και για τη διεύθυνση και φορά της.

Πραγματικά, ξεκινώντας στο διάγραμμα από τη μηδενική δύναμη $\delta\zeta$ της ράβδου 8, και επαληθεύοντας τις δυνάμεις των ράβδων 7, 5 και 4 αντίστοιχα με τα διανύσματα $\vec{\zeta\eta}$, $\vec{\eta\theta}$ και $\vec{\theta\gamma}$, διαπιστώνουμε ότι η ένταση $\gamma\delta$ της αντίδρασης Β είναι όντως 9 kN (= 9 μονάδες) με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα άνω.

Σημείωση: Ο προσδιορισμός των αντιδράσεων, ειδικά για το δικτύωμα αυτό θα μπορούσε ν' αποφευχθεί επειδή για το ξεκίνημα της επίλυσης (γραφικής ή αναλυτικής), υπάρχει κόμβος, (ο Δ), με δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις (των ράβδων 1 και 2).

Σε τέτοιες περιπτώσεις οι αντιδράσεις **προκύπτουν** από την εξέταση ισορροπίας των κόμβων **στήριξης**, που κανονικά θα χρησιμοποιούσαμε για επαλήθευση.

7.3 – Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter)

Είναι δυνατόν ένα δικτύωμα να είναι στατικά ορισμένο και σταθερό, να πληρούται δηλαδή η σχέση $\rho_{εσ} + \rho_{εξ} = 2κ$, και όμως να παρουσιάζει προβλήματα στην επίλυσή του. Τα προβλήματα αυτά άλλοτε είναι δυνατόν να ξεπεραστούν με κάποια προσπάθεια και άλλοτε όχι.

Είναι π.χ. δυνατόν να ζητούνται οι δυνάμεις **μόνο ορισμένων** ράβδων ενός μεγάλου δικτυώματος, που βρίσκονται μακριά από τους κόμβους από όπου ξεκινάμε την επίλυση, οπότε, για να φθάσουμε στις ζητούμενες δυνάμεις των ράβδων, θα έχουμε ήδη κοπιάσει άσκοπα, πέρα από τη σημαντική πιθανότητα λάθους που αντιμετωπίζουμε ως το τέλος.

Σε άλλες πάλι περιπτώσεις είναι **αδύνατο** το ξεκίνημα της επίλυσης, επειδή σε όλους τους κόμβους συντρέχουν τουλάχιστον **τρεις** άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σε ορισμένες τέλος περιπτώσεις, ενώ ξεκινάμε κανονικά την επίλυση, φτάνουμε σε κάποιο στάδιο όπου η συνέχιση της επίλυσης είναι αδύνατη, επειδή σ' οποιονδήποτε επόμενο κόμβο συντρέχουν 3 άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, και όχι μόνο σ' αυτές, τη λύση δίνει η αναλυτική μέθοδος των τομών ή μέθοδος **Ritter**, από το όνομα του εφευρέτη της.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή κάνουμε μια τομή στο φορέα, χωρίζοντάς τον σε δυο τμήματα.

Στο ένα από αυτά, αφού τοποθετήσουμε τις πραγματικές αλλά άγνωστες για μας δυνάμεις στις θέσεις των ράβδων που κόψαμε, εξετάζουμε την ισορροπία του, χρησιμοποιώντας συνήθως τις στερεοστατικές εξισώσεις.

Κατά την εκτέλεση της τομής φροντίζουμε :

- α) να μην απομονώσουμε κόμβο αλλά τουλάχιστον τριγωνικό δίσκο, και
- β) ο αριθμός των ράβδων που θα κόψουμε να είναι 3 ή το πολύ 4.

Ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 3, επειδή αλλιώς δε θα μπορούσαν να συνδεθούν σταθερά τα δύο τμήματα που χωρίσαμε με την τομή. Και επειδή η τομή περισσοτέρων ράβδων σημαίνει μεγαλύτερη δυσκολία στον υπολογισμό των δυνάμεων τους, φροντίζουμε να τις περιορίζουμε στον ελάχιστο αριθμό, δηλαδή 3.

Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν άγνωστες αντιδράσεις στο τμήμα που απομονώσαμε, ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων που κόψαμε γίνεται συνήθως αν αρχικά θεωρήσουμε το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών όλων των δυνάμεων $(\sum M)_i^{\perp+} = 0$, ως προς το σημείο τομής i οποιωνδήποτε δύο από τις κομμένες ράβδους. Τότε αν ο αριθμός των κομμένων ράβδων είναι:

α) τρεις, από τη σχέση $(\sum M)_i^{\perp+} = 0$ βρίσκουμε κατ' ευθείαν τη μια από αυτές.

β) τέσσερις, υποχρεωτικά θ' αναζητήσουμε και μιαν άλλη εξίσωση $(\sum x^{\rightarrow+} = 0 \text{ ή } \sum y^{\uparrow+} = 0)$, όπου να μην εμφανίζονται οι άγνωστες, ως προς το σημείο τομής των οποίων πήραμε το προηγούμενο αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.

Στη συνέχεια, για τις υπόλοιπες δύο δυνάμεις χρησιμοποιούμε τις στερεοστατικές εξισώσεις $\sum x^{\rightarrow+} = 0 \text{ ή } \sum y^{\uparrow+} = 0$, ή το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος ροπών ως προς άλλο σημείο.

Το μόνο πρόβλημα που συνήθως παρουσιάζεται στο αλγεβρικό άθροισμα ροπών είναι ο υπολογισμός του **μοχλοβραχίονα** κάθε δύναμης.

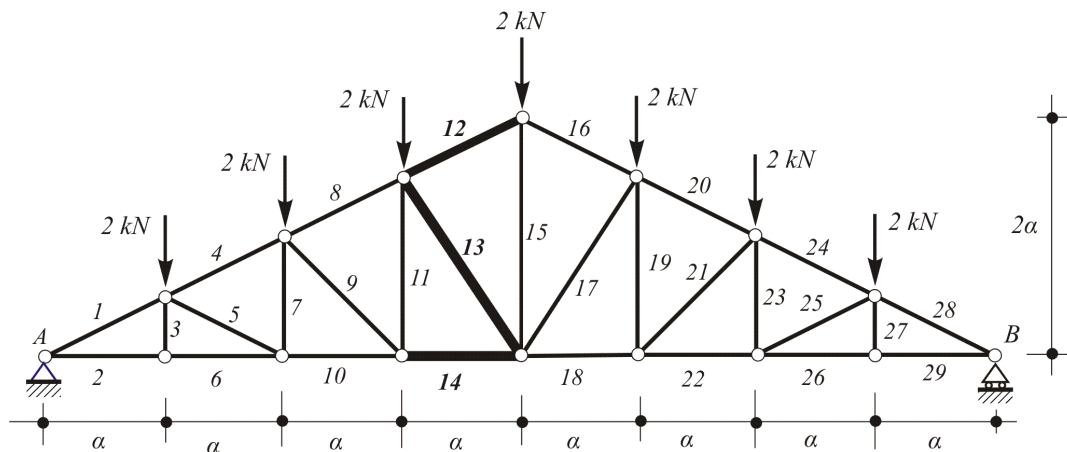
Στην περίπτωση που ο παραπάνω μοχλοβραχίονας είναι προφανής ή εύκολα (γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά) προσδιορίσιμος έχει καλώς. Αν όμως εμφανίζεται ιδιαίτερη δυσκολία ή πολυπλοκότητα, προσφεύγουμε στο γραφικό του προσδιορισμό, σύμφωνα με την κλίμακα που χρησιμοποιήσαμε για τη σχεδίαση του δικτυώματος.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται η περιγραφή της μεθόδου μόνο για να αντιμετωπιστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα που περιγράφεται. Η παραπέρα επίλυση του φορέα, αν ζητείται, μπορεί να γίνει κανονικά με μια από τις μεθόδους που ήδη αναφέραμε (αναλυτικά ή γραφικά).

Κατά την εξέταση της ισορροπίας του τμήματος που κόπηκε, εισάγουμε συνήθως την άγνωστη δύναμη της ράβδου με **εφελκυστική** φορά. Όπως αναφέραμε και στην αναλυτική μέθοδο ισορροπίας των κόμβων, αν το πρόσημο που θα προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης είναι θετικό, η εφελκυστική φορά που εξελέγη είναι σωστή. Στην αντίθετη περίπτωση η ένταση της ράβδου είναι θλιπτική.

7.3.1 – Παραδείγματα

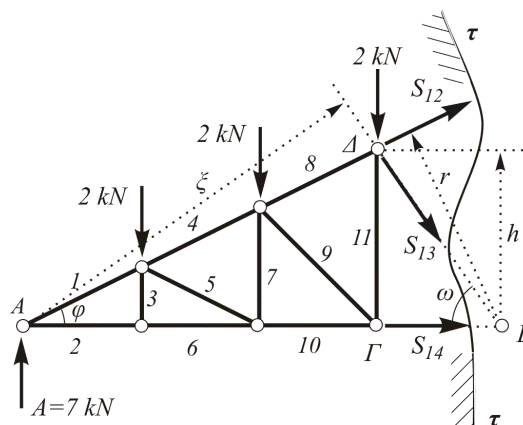
- 1** Του επίπεδου δικτυωτού φορέα του παρακάτω σχήματος 7_12, να υπολογιστούν μόνο οι δυνάμεις των ράβδων 12, 13 και 14.



Σχ. 7_12

Λύση

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που εδώ λόγω συμμετρίας είναι $A = B = 7 \text{ kN}$, θεωρούμε την τομή ττ σχήματος 7_13, που χωρίζει το φορέα σε δύο τμήματα, κόβοντας τις ράβδους των οποίων ζητούνται οι δυνάμεις (ή τουλάχιστον τη μια από αυτές).



Σχ. 7_13

Προ της τομής αυτής, ο προς τα αριστερά της ευρισκόμενος δίσκος ΑΓΔ, ισορροπούσε κάτω από την επίδραση της γνωστής αντίδρασης $A = 7$

kN, των τριών κατακόρυφων δυνάμεων των 2 kN, καθώς και εκείνων που αντιστοιχούν στις ράβδους 12, 13 και 14 της τομής.

Η ισορροπία του παραπάνω δίσκου εξακολουθεί να υπάρχει, εφ' όσον στις θέσεις των κομμένων ράβδων θέσουμε τις πραγματικές αλλά άγνωστες ακόμη (εσωτερικές για το δικτύωμα) δυνάμεις S_{12} , S_{13} , και S_{14} , τις οποίες εισάγουμε εφελκυστικές. Αν το πρόσημο που θα προκύψει από την επίλυση είναι αρνητικό, θα σημαίνει ότι οι δυνάμεις ασκούνται αντίθετα και θλίνουν τους αντιστοίχους κόμβους.

Αν h είναι η απόσταση του Δ (σημείου τομής των ράβδων 12 και 13) από τη ράβδο 14, r η απόσταση του E (σημείου τομής των 13 και 14) από τη 12 και ζ η απόσταση του A (σημείου τομής των 12 και 14) από τη 13, εφ' όσον ο δίσκος ισορροπεί, θα ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\sum x^+ = 0, \quad \sum y^+ = 0, \quad \text{και} \quad (\sum M)_i^+ = 0.$$

Αντί αυτών μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τρεις φορές την τελευταία εξίσωση ως προς τα σημεία Δ , E και A αντίστοιχα, αφού οι μοχλοβραχίονες h , r και ζ των παραπάνω σημείων ως προς τις αντίστοιχες άγνωστες δυνάμεις υπολογίζονται εύκολα τριγωνομετρικά.

$$\varepsilon\varphi = \frac{1}{2} = \frac{h}{3a} \quad \Rightarrow \quad \text{και} \quad \underline{h = 1,5a}$$

$$\varphi = 26,57^\circ \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0,447, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,894$$

$$\text{και} \quad \underline{r = 4a \cdot \eta\mu\varphi = 1,79a}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1,5a}{a} = 1,5 \Rightarrow \omega = 56,31^\circ, \quad \eta\mu\omega = 0,832, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = 0,555$$

$$\text{και} \quad \underline{\zeta = 4a \cdot \eta\mu\omega = 3,33a}$$

Έτσι θα έχουμε:

$$(\sum M)_\Delta^+ = 0 \Rightarrow 7 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a - S_{14} \cdot 1,5a = 0$$

$$S_{14} = \frac{21 - 4 - 2}{1,5} = 10 \text{ kN}$$

$$(\sum M)_E^+ = 0 \Rightarrow 7 \cdot 4a - 2 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a + S_{12} \cdot 1,79a = 0$$

$$S_{12} = -\frac{28 - 6 - 4 - 2}{1,79} = -8,94 \text{ kN}$$

$$(\sum M)_A^+ = 0 \Rightarrow 2 \cdot a + 2 \cdot 2a + 2 \cdot 3a + S_{13} \cdot 3,33a = 0$$

$$S_{13} = -\frac{2 + 4 + 6}{3,33} = -3,6 \text{ kN}$$

Τώρα μπορούμε απλά να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \quad \text{και} \quad \sum y^{\uparrow+} = 0,$$

που θα μπορούσαμε άλλωστε να χρησιμοποιήσουμε από πριν σε σύστημα για τον προσδιορισμό των δυνάμεων S_{12} και S_{13} .

$$\sum x^{\rightarrow+} = 10 - 3,6 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 8,94 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 10 - 2 - 8 = 0!$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 7 - 2 - 2 - 2 - 8,94 \cdot \eta\mu\varphi + 3,6 \cdot \eta\mu\omega = 1 - 3,99 + 2,99 = 0!$$

Σημείωση

Το γεγονός ότι ο φορέας είναι στατικά ορισμένος και σταθερός ($29 + 3 = 2 \cdot 16$), σε συνδυασμό με την ύπαρξη κόμβων (Α και Β) δύο μόνον αγνώστων δυνάμεων, σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε και μια από τις προηγούμενες μεθόδους. Κάνοντας την τομή απλά αποφεύγουμε τον επί πλέον χρόνο και κόπο καθώς και την πιθανότητα λάθους, ώσπου να φτάσουμε διαδοχικά στις ζητούμενες δυνάμεις.

Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του.

Αντιδράσεις	
A	B
7	7

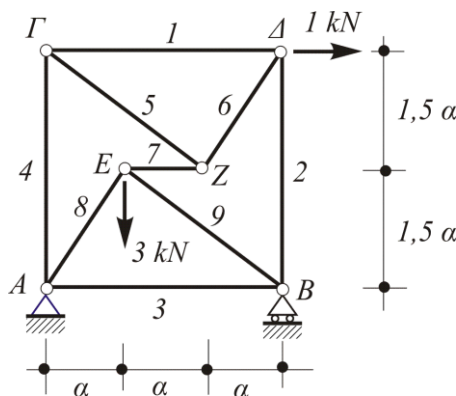
Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Δύν (kN)	-15,65	14	0	-13,42	-2,24	14	1	-11,18	-2,83	12	2

Ράβδος	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Δύν (kN)	-8,94	-3,61	10	6	-8,94	-3,61	10	2	-11,18	-2,83

Ράβδος	22	23	24	25	26	27	28	29
Δύν (kN)	12	1	-13,42	-2,24	14	0	-15,65	14

2

Να αντιμετωπιστεί η επίλυση (γραφική ή αναλυτική) του επίπεδου δικτυωτού φορέα που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 7_14.



Σχ. 7_14

Λύση

Το παραπάνω δικτύωμα είναι σύνθετο. Αποτελείται από τους δίσκους ΓΔΖ και ΑΒΕ οι οποίοι συνδέονται με τρεις απλές ράβδους που δεν είναι συντρέχουσες.

Είναι στατικά ορισμένο και σταθερό, διότι ισχύει η σχέση:

$$\rho_{es} + \rho_{ez} = 2\kappa, \quad \text{δηλαδή} \quad 9 + 3 = 2 \cdot 6$$

Οι αντιδράσεις υπολογίζονται εύκολα από τις γνωστές στερεοστατικές εξισώσεις:

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 3\alpha + 3 \cdot \alpha - B \cdot 3\alpha = 0 \Rightarrow B = 2 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 3 + 2 = 0 \Rightarrow A_y = 1 \text{ kN}$$

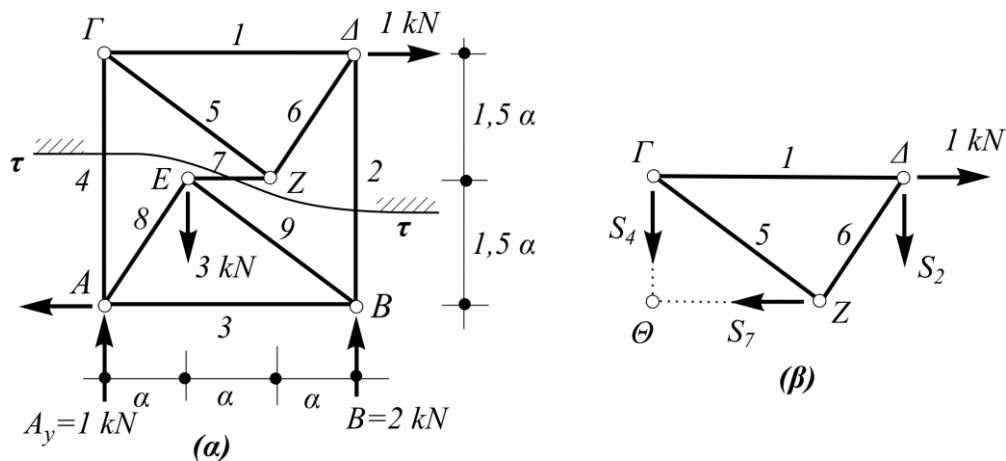
$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 1 = 0 \Rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$

Στο παραπάνω δικτύωμα, για την αντιμετώπιση της λύσης, έτσι ώστε να προκύψουν οι δυνάμεις των ράβδων του όπως φαίνονται στον παραπάνω πίνακα, επειδή σε κάθε κόμβο συντρέχουν τρεις ράβδοι, δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων ούτε το διάγραμμα Cremona.

Αναγκαστικά λοιπόν χρησιμοποιούμε τομή ττ (σχ. α), που τέμνει τις τρεις ράβδους σύνδεσης των δύο δίσκων.

Έτσι απομονώνουμε τον επάνω δίσκο ΓΔΖ (σχ. β) και εξετάζουμε την ισορροπία του, κάτω από την επίδραση των δυνάμεων 1 kN, S_2 , S_4 και S_7 , τις οποίες εισάγουμε εφελκυστικές.

Συνεπώς από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, προκύπτει:



Σχ. 7_15 Χαρακτηριστική τομή - διάγραμμα του επάνω ελευθέρου σώματος

$$(\Sigma M)_{\Theta}^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1,5\alpha + S_2 \cdot 3\alpha = 0 \Rightarrow S_2 = -0,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = -S_4 + 0,5 = 0 \Rightarrow S_4 = 0,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_7 = 0 \Rightarrow S_7 = 1 \text{ kN}.$$

Μετά τον υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων 2, 4 και 7, ή έστω και μίας εξ αυτών, συνεχίζουμε εξετάζοντας την ισορροπία κάθε κόμβου (αναλυτικά ή γραφικά).

Σημείωση:

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων εδώ δεν ήταν απαραίτητος, επειδή για την ισορροπία του παραπάνω δίσκου οι αντιδράσεις δεν εμφανίστηκαν πουθενά. Έγινε για την περίπτωση που εξετάζοταν η ισορροπία του κάτω δίσκου ΑΒΕ, αλλά και για να αποδειχθεί το αδύνατο της επίλυσης με γραφική ή αναλυτική μέθοδο.

Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολόκληρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του

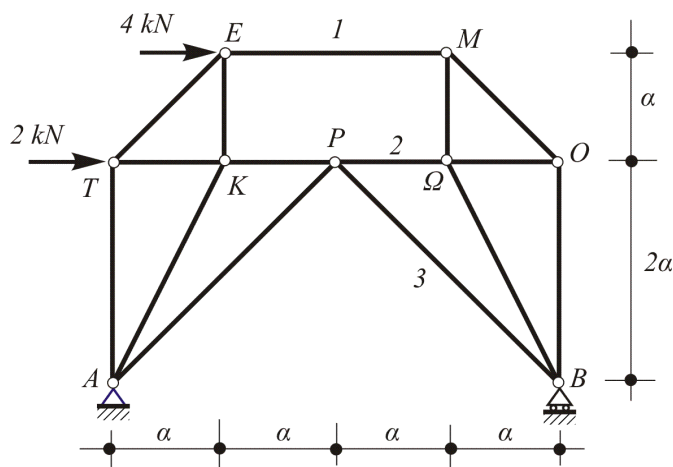
Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	0,67	-0,5	0,67	0,5	-0,83	0,6	1	0,6	-0,83

3

Του σύνθετου επίπεδου δικτυώματος του σχήματος 7_16, να αντιμετωπιστεί, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η αναλυτική ή γραφική του επίλυση.

Λύση

Ακολουθεί παρόμοια και αντίστοιχη διαδικασία μ' εκείνη που ακολουθήθηκε ήδη στο προηγούμενο παράδειγμα.



Σχ. 7_16

Το παραπάνω δικτύωμα είναι στερεό, αφού αποτελείται από τους δίσκους ΑΡΚΕΤΑ και ΒΡΩΜΟΒ που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της άρθρωσης Ρ και της ράβδου ΕΜ. Άλλωστε ισχύει και η σχέση $\rho_{\varepsilon\sigma} + \rho_{\varepsilon\zeta} = 2\kappa$, αφού $15 + 3 = 2 \cdot 9$.

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων, ευχερής όπως και προηγουμένως, δίνει:

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2a + 4 \cdot 3a - B \cdot 4a = 0 \Rightarrow B = 4 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = -A_y + 4 = 0 \Rightarrow A_y = 4 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 2 + 4 = 0 \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN}.$$

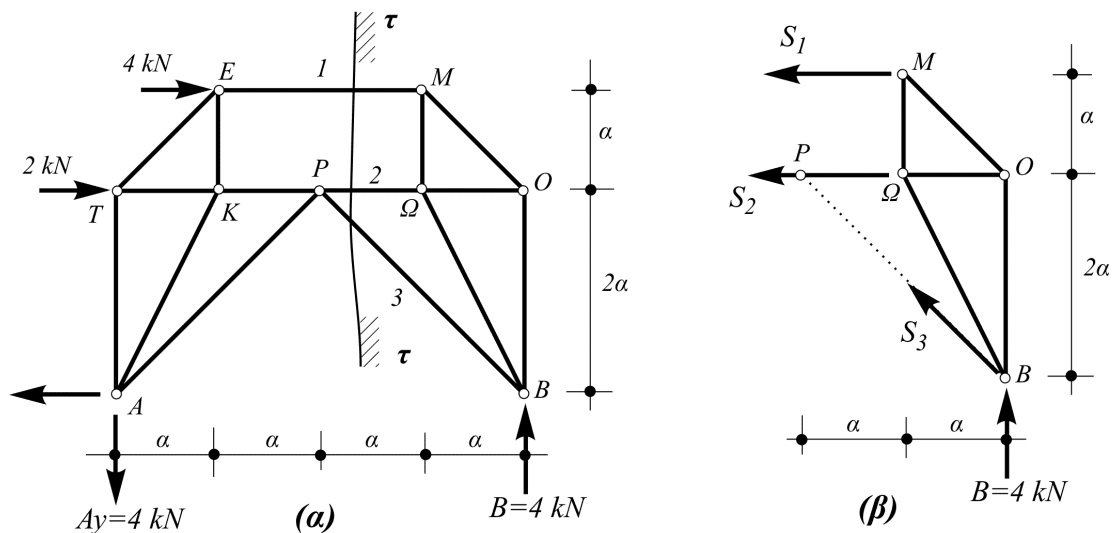
Ωστόσο, ούτε το διάγραμμα Cremona ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας κόμβων οδηγεί σε προσδιορισμό δύναμης οποιασδήποτε ράβδου.

Προσφεύγουμε λοιπόν στην τομή ττ (σχ. α), που τέμνει τις ράβδους 1, 2 και 3. Έτσι απομονώνεται ο δίσκος ΒΩΜΟΒ (σχ. β), στον οποίο ασκούνται η αντίδραση $B = 4 \text{ kN}$ και οι δυνάμεις S_1 , S_2 και S_3 που εισάγονται εφελκυστικές. Έτσι έχουμε:

$$(\Sigma M)_P^{\perp+} = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot a - 4 \cdot 2a = 0 \Rightarrow S_1 = -8 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 4 + S_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{4}{0,707} = -5,657 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 8 - S_2 + 5,657 \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_2 = 8 + 4 = 12 \text{ kN}.$$



Σχ. 7_14 Χαρακτηριστική τομή - διάγραμμα του δεξιού ελευθέρου σώματος

Μετά τον προσδιορισμό της S_3 ή S_1 , ο υπολογισμός του δικτυώματος με την αναλυτική ή γραφική μέθοδο είναι δυνατός, αφού μπορούμε να ξεκινήσουμε από τον κόμβο Β ή Μ αντίστοιχα και να συνεχίσουμε κανονικά.

Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7
Δύναμη (kN)	-8	-12	-5,66	8,94	-8	-4	4,47

Ράβδος	8	9	10	11	12	13	14	15
Δύναμη (kN)	5,66	2	4	8	-5,66	4	8	-11,31

4

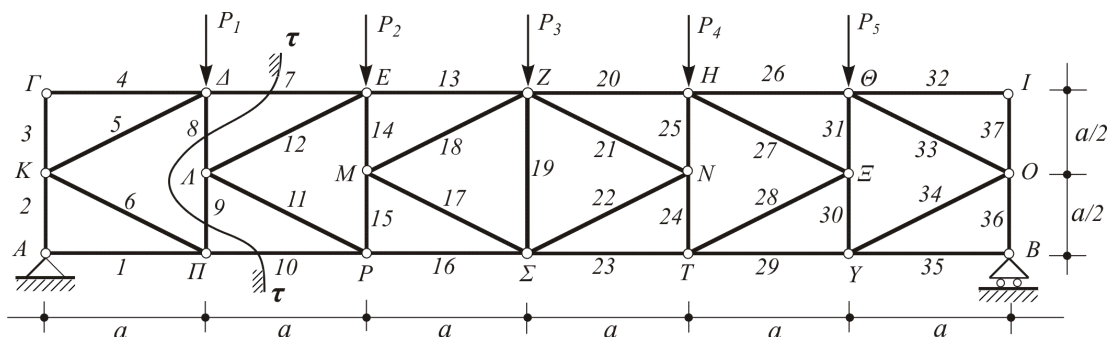
Του επίπεδου δικτυώματος τύπου « Κ » του σχήματος 7_18, να εξεταστεί η επίλυση του γραφικά ή αναλυτικά.

Λύση

Ολοκληρώνουμε την ανάπτυξη της μεθόδου των τομών με το παραπάνω δικτύωμα τύπου « Κ », το οποίο, όπως και τα προηγούμενα, είναι στατικά ορισμένο και σταθερό ($37 + 3 = 2 \cdot 20$).

Παρατηρούμε ότι, μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία, το διάγραμμα Cremona αρχίζει κανονικά, π.χ. από τον κόμβο Α, υπολογίζοντας τις δυνάμεις των ράβδων 1, 2 και στη συνέχεια των των ράβδων 3 και 4 του κόμβου Γ.

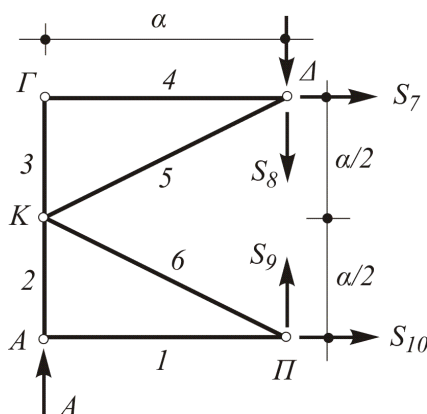
Όμως, ήδη από τον κόμβο Π και μετά, είναι αδύνατη η συνέχιση του υπολογισμού των δυνάμεων των ράβδων, επειδή τόσο σ' αυτόν όσο και στους ανάλογους μ' αυτόν κόμβους Δ, Θ και Υ συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις ράβδων.



Σχ. 7_18

Προσφεύγουμε λοιπόν υποχρεωτικά στην τομή ττ, εξετάζοντας την ισορροπία του αριστερού τμήματος (Σχ. 7_19). Θεωρώντας εφελκυστικές τις δυνάμεις των ράβδων 7, 8, 9 και 10 που κόψαμε, θα έχουμε:

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{++} = 0 \Rightarrow A \cdot \alpha - S_{10} \cdot a = 0 \Rightarrow S_{10} = A$$



Σχ. 7_19

$$\Sigma x^+ = 0 \Rightarrow S_7 + S_{10} = 0 \Rightarrow S_7 = -S_{10} = -A$$

Επαναλαμβάνοντας όμοια διαδικασία και σε 'δεξιότερη' τομή, μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση του δικτυώματος, φτάνοντας ως το μέσον του (κόμβοι Ζ και Σ), των οποίων την ισορροπία θα εξετάσουμε αφού κάνουμε επί πλέον κατακόρυφες τομές εκατέρωθεν αυτών, για να συνεχίσουμε, ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία υπολογισμών προς το άλλο άκρο του φορέα.

Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του.

Αντιδράσεις	A	B
Δύναμη (kN)	5,83	9,17

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	0	-5,83	0	0	-6,52	6,52	-5,83	1,92	-2,93

Ράβδος	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Δύναμη (kN)	5,83	5,4	-5,4	-10,67	0,42	-2,42	10,67	3,17	-3,17

Ράβδος	19	20	21	22	23	24	25	26
Δύναμη (kN)	-1,5	-13,33	-0,19	0,19	13,33	-2,08	-1,92	-9,17

Ράβδος	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Δύναμη (kN)	-4,66	4,66	9,17	-4,58	-0,42	0	-10,25	0	10,25

Ράβδος	36	37
Δύναμη (kN)	-9,17	0

Κεφάλαιο 8°

Τριαρθρωτοί φορείς

Τριαρθρωτός φορέας ή **τριαρθρωτό τόξο** ονομάζεται κάθε επίπεδη κατασκευή που αποτελείται από δυο στερεά τμήματα τα οποία συνδέονται με **άρθρωση** τόσο μεταξύ τους όσο και με το έδαφος.

Ανάλογα με το είδος των στερεών τμημάτων του φορέα διακρίνουμε τους **ολόσωμους** και τους **δικτυωτούς** φορείς.

Οι τριαρθρωτοί φορείς αν και στηρίζονται με δύο αρθρώσεις στο έδαφος, παρουσιάζοντας έτσι 4 άγνωστες αντιδράσεις, ανήκουν στους **ισοστατικούς** φορείς.

Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών που αναπτύσσονται σε τυχούσα διατομή, ενδιαφέρον παρουσιάζει κυρίως ο υπολογισμός των αντιδράσεων.

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό που παρουσιάζουν οι ολόσωμοι τριαρθρωτοί φορείς είναι ότι οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στις διατομές τους είναι αρκετά **μικρότερες** από εκείνες που παρουσιάζονται στις απλές ολόσωμες δοκούς που χρησιμοποιούνται για την κάλυψη του ίδιου ανοίγματος με τα **ίδια εξωτερικά φορτία**. Σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις, όπου είναι δυνατόν να δοθεί συγκεκριμένη **παραβολική μορφή** στο φορέα, είναι δυνατός ο **μηδενισμός** των καμπτικών ροπών σ' όλο το μήκος του φορέα!

Είναι επομένως οι τριαρθρωτοί φορείς γενικά οικονομικότεροι των συνήθων δοκών, αλλά μόνο σε κατασκευές μεγάλων ανοιγμάτων. Και τούτο διότι ένα σημαντικό κόστος ενός τριαρθρωτού φορέα προβλέπεται για την εξασφάλιση της σωστής στατικής λειτουργίας των τριών αρθρώσεων του.

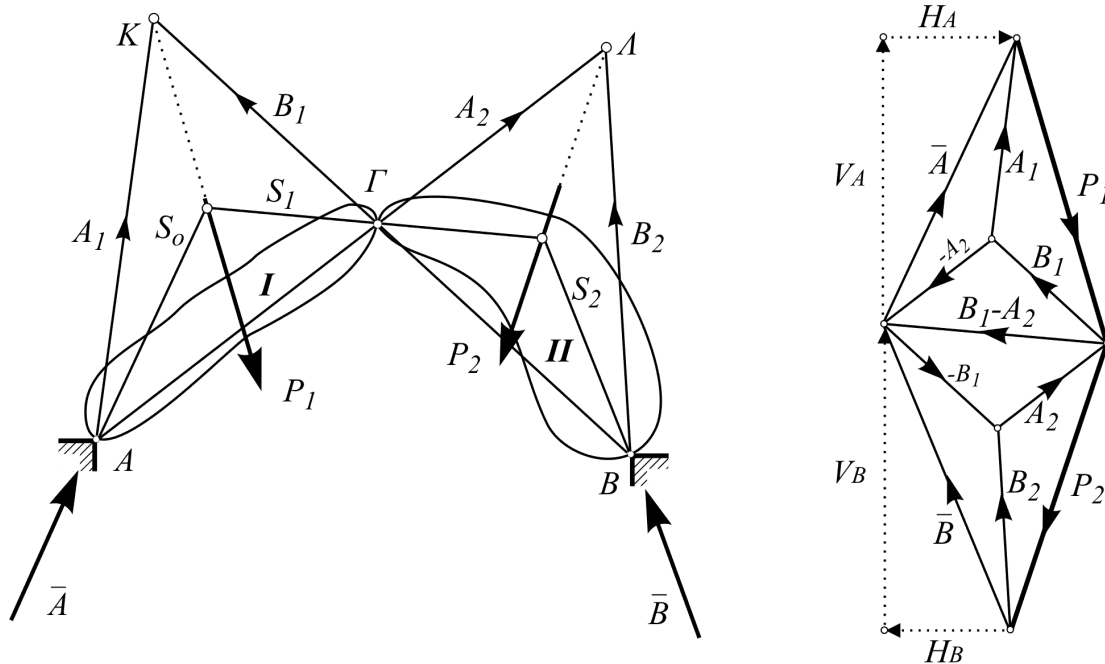
8.1 – Υπολογισμός των αντιδράσεων

α) Γραφικά

Θεωρούμε τον τριαρθρωτό φορέα του σχήματος 8_1, που αποτελείται από τα τμήματα I και II, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με άρθρωση στο Γ, και στηρίζονται στο έδαφος επίσης μέσω αρθρώσεων στα σημεία Α και Β. Ζητούνται:

α) Οι αντιδράσεις στις στηρίξεις Α και Β

β) Η δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω της άρθρωσης Γ , όταν στο τμήμα I ενεργεί η συνισταμένη δύναμη P_1 και στο II η P_2 .



Σχ. 8_1 Γραφική επίλυση αντιδράσεων και μεταβιβαζόμενης δύναμης

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας μπορούμε ν' ακολουθήσουμε την παρακάτω σειρά σκέψεων.

Αν στο σύστημα ενεργούσε μόνο η δύναμη P_1 , τότε οι αντιδράσεις που θ' αναπτύσσονταν στις στηρίξεις A και B θα ήταν αντίστοιχα η A_1 και η B_1 , από τις οποίες η δεύτερη έχει άξονα τη BΓ ενώ η πρώτη περνάει από το A και το σημείο τομής K της B_1 με την P_1 .

Όμοια, αν η P_2 ενεργούσε μόνη, θα εμφανίζονταν στις στηρίξεις οι αντιδράσεις A_2 και B_2 , εκ των οποίων η πρώτη έχει φορέα την AΓ ενώ η δεύτερη περνάει από το B και το σημείο τομής Λ της A_2 με την P_2 .

Οι εντάσεις, οι διευθύνσεις και οι φορές των δυνάμεων αυτών φαίνονται στο διάγραμμα δυνάμεων.

Όταν όμως οι δυνάμεις P_1 και P_2 ενεργήσουν μαζί, τότε το τμήμα I θα ισορροπήσει κάτω από την επίδραση των παρακάτω δυνάμεων.

α) της P_1

β) των γνωστών ήδη αντιδράσεων B_1 και $-A_2$ που δημιουργεί το τμήμα II στο I για τις δύο περιπτώσεις φορτίσεων και

γ) της άγνωστης αντίδρασης \bar{A} .

Έτσι το κλειστό δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων P_1 , B_1 , $-A_2$ και \bar{A} στο διάγραμμα δυνάμεων θα μας ορίσει την αντίδραση \bar{A} .

Στη συνέχεια η \bar{B} θα κλείσει το δυναμοπολύγωνο των P_1, P_2 και \bar{A} .

Μέσω της άρθρωσης Γ διαβιβάζεται η $(B_1 - A_2)$ από το τμήμα II προς το I και η αντίθετη προς αυτήν από το I προς το II.

Οι φορείς των αντιδράσεων \bar{A} και \bar{B} καθώς και της δια του Γ διαβιβαζόμενης δύναμης είναι οι S_0, S_2 και S_1 αντίστοιχα που σημειώνονται στο διάγραμμα θέσης.

Οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων \bar{A} και \bar{B} δίνουν αντίστοιχα τις οριζόντιες και κατακόρυφες καταπονήσεις του φορέα.

Σημείωση: Ίδιο αποτέλεσμα των αντιδράσεων θα μπορούσαμε να είχαμε αν μετά τις δύο φάσεις φόρτισης θεωρούσαμε την αντίδραση για την κάθε στήριξη σαν συνισταμένη των επί μέρους αντιδράσεων που εμφανίστηκαν χωριστά σε κάθε φάση φόρτισης.

$$\text{Δηλαδή } \bar{A} = A_1 + A_2 \quad \text{και} \quad \bar{B} = B_1 + B_2 .$$

β) Αναλυτικά

Για τυχούσα εξωτερική φόρτιση του τριαρθρωτού φορέα, σε κάθε μία από τις στηρίξεις των αρθρώσεων A και B , αναπτύσσεται γενικά μία αντίδραση, που αναλύεται σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα. Έτσι προκύπτουν συνολικά οι συνιστώσες V_A, H_A και V_B, H_B .

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό των τεσσάρων αυτών αντιδράσεων, σχηματίζουμε τις τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$(\sum M)^{\downarrow+} = 0, \quad \sum y^{\uparrow+} = 0, \quad \sum x^{\rightarrow+} = 0,$$

και επί πλέον μια τέταρτη εξίσωση, από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών στη θέση της άρθρωσης Γ , είτε για το αριστερό είτε για το δεξιό τμήμα,

$$(\sum M)\Gamma_{\alpha\rho\iota\sigma\tau.}^{\downarrow+} = 0 \quad \text{ή} \quad (\sum M)\Gamma_{\delta\epsilon\zeta}^{\downarrow+} = 0,$$

σχηματίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών μόνο των αριστερά ή δεξιά του Γ ευρισκομένων δυνάμεων.

Συνήθως συμφέρει ν' αρχίσουμε από την εξίσωση αυτή και στη συνέχεια να καταλήγουμε στις στερεοστατικές. Συγκεκριμένα:

α) Αν οι στηρίξεις είναι στο ίδιο επίπεδο (ισοϋψείς), η εξίσωση $(\sum M)_A^{\downarrow+} = 0$, θα μας δώσει κατ' ευθείαν την V_B , ενώ στη συνέχεια η $(\sum M)\Gamma_{\delta\epsilon\zeta}^{\downarrow+} = 0$ θα μας δώσει την H_B .

Στη συνέχεια, οι εξισώσεις $\sum x^{\rightarrow+} = 0$ και $\sum y^{\uparrow+} = 0$, θα μας δώσουν αντίστοιχα τις υπόλοιπες H_A και V_A .

β) Αν οι στηρίξεις είναι ανισοϋψείς, το σύστημα των εξισώσεων

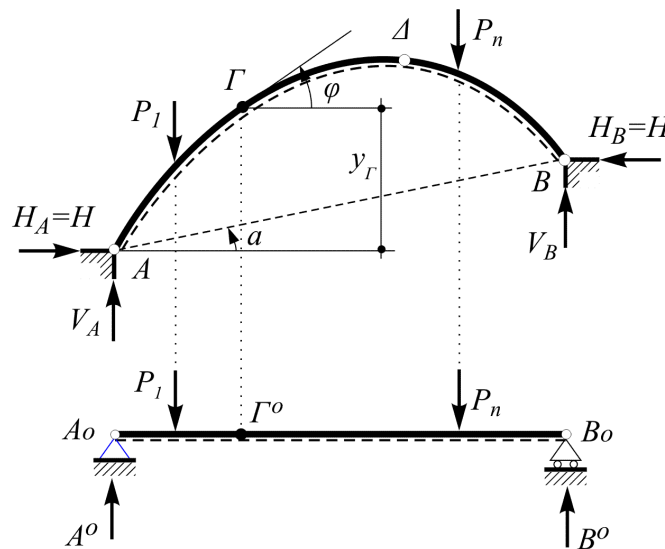
$$(\sum M)_{\Delta}^{\perp+} = 0 \quad \text{και} \quad (\sum M)_A^{\perp+} = 0,$$

θα μας δώσει μόνο τις αντιδράσεις H_B και V_B . Μετά την επίλυσή του, για τις H_A και V_A ακολουθείται η ίδια με τις ισοϋψείς πορεία ($\sum x^+ = 0$, $\sum y^{\uparrow+} = 0$).

8.2 – Υπολογισμός της έντασης

Μετά τον προσδιορισμό των αντιδράσεων, ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών M , Q , N σε κάθε διατομή γίνεται βάσει του ορισμού, μέσω των αριστερά (ή δεξιά) της διατομής ευρισκομένων δυνάμεων (φορτίων και αντιδράσεων).

Αν ο φορέας έχει καμπύλο άξονα τότε καταφεύγουμε στις σχέσεις:



Σχ. 8_2 Το καμπύλο τόξο και ο συσχετισμός του με την αμφιέρειστη δοκό

$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma^0} - H \cdot y_{\Gamma} \cdot \sigma \nu \alpha$$

$$Q_{\Gamma} = Q_{\Gamma^0} \sigma \nu \nu \phi - H \eta \mu (\phi - \alpha)$$

$$N_{\Gamma} = -Q_{\Gamma^0} \eta \mu \phi - H \sigma \nu \nu (\phi - \alpha)$$

όπου: α η γωνία που σχηματίζει η AB με την οριζόντια που περνάει από το A

φ η γωνία κλίσης της υπόψη διατομής

H η συνιστώσα της H_A ή H_B κατά τη διεύθυνση AB

M_{Γ^0} , Q_{Γ^0} η καμπτική ροπή και η τέμνουσα δύναμη αντίστοιχα στη διατομή Γ^0 της αντίστοιχης προς το φορέα αμφιέρειστης A_0B_0 , που φορτίζεται όπως ο αρχικός φορέας.

Στην άρθρωση Δ , πρέπει φυσικά να ισχύει:

$$M_{\Delta} = 0.$$

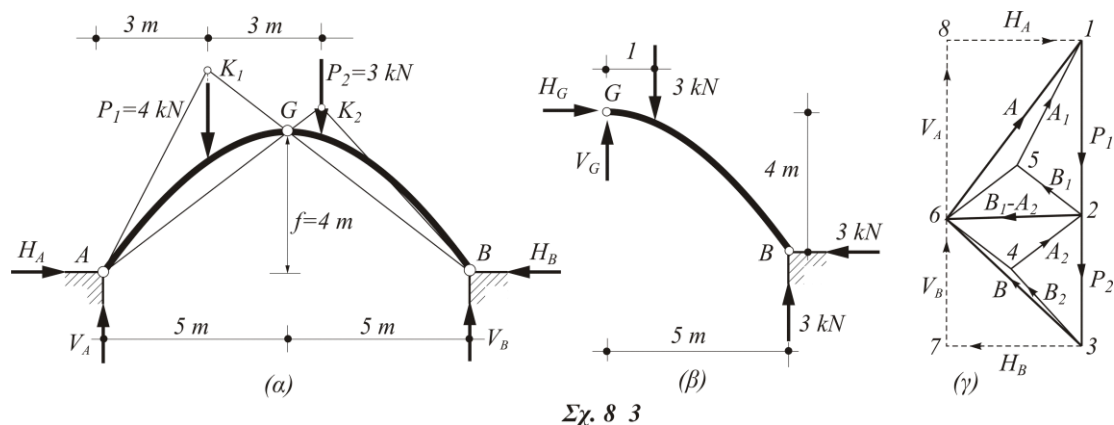
8.3 – Παράδειγμα

Του παραβολικού τριαρθρωτού φορέα που εικονίζεται στο σχήμα 8_3, να υπολογιστούν αναλυτικά και γραφικά

α) οι αντιδράσεις στις στηρίξεις και

β) η δύναμη που διαβιβάζεται μέσω της άρθρωσης G.

Λύση



Αναλυτικά

Αν H_A , H_B και V_A , V_B είναι οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων στις στηρίξεις A και B, από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, σε συνδυασμό με τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 8.1 (β), θα έχουμε:

$$(\sum M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - V_B \cdot 10 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 3 \text{ kN}}$$

$$(\sum M)_{G \& \xi}^{\perp+} = 0 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + H_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow \underline{H_B = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_A - 4 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 4 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 = H_A - 3 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 3 \text{ kN}}$$

Αν H_G και V_G είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που διαβιβάζεται δια της άρθρωσης G, εξετάζοντας την ισορροπία του δεξιού τμήματος (σχ. β), θα έχουμε:

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 = H_G - 3 = 0 \Rightarrow \underline{H_G = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_G - 3 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{V_G = 0}$$

Γραφικά

Στο σχήμα (α) φέρνουμε τη BG που τέμνει την P_1 στο K_1 , καθώς και την AG που τέμνει την P_2 στο K_2 .

Στο σχήμα (γ) παίρνουμε κατακόρυφα με συγκεκριμένη κλίμακα τις δυνάμεις P_1 και P_2 .

Η δύναμη P_1 αναλύεται στις B_1 και A_1 , παράλληλες αντίστοιχα προς τις BK_1 και AK_1 .

Επίσης η P_2 αναλύεται στις B_2 και A_2 , παράλληλες αντίστοιχα προς τις BK_2 και AK_2 .

Έτσι ορίζονται τα σημεία 5 και 4, τα οποία μαζί με το 2 αποτελούν τις τρεις κορυφές παραλληλογράμμου, του οποίου η 4^η κορυφή - δηλαδή το σημείο 6 - δίνει, μετά το κλείσιμο του δυναμοπολυγώνου, τις αντιδράσεις A και B αντίστοιχα.

Από την ανάλυση των αντιδράσεων σε κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες, προκύπτει:

$$V_A = 4 \text{ kN} \quad H_A = 3 \text{ kN}$$

$$\text{και } V_B = 3 \text{ kN} \quad H_B = 3 \text{ kN}.$$

Η δύναμη $\overrightarrow{26} = B_1 - A_2$, είναι η διαβιβαζόμενη από το δεξιό στο αριστερό τμήμα, ενώ η αντίθετη προς αυτή δύναμη $\overrightarrow{62} = -(B_1 - A_2)$, είναι η διαβιβαζόμενη από το αριστερό προς το δεξιό τμήμα.

Σύμφωνα με το διάγραμμα δυνάμεων (σχ. γ), η δύναμη αυτή είναι οριζόντια και έχει ένταση 3 kN.

Κεφάλαιο 9^ο

Τριβή

Όταν δύο σώματα εφάπτονται μεταξύ τους εμφανίζεται πάντοτε μια αντίσταση που τείνει να εμποδίσει την ολίσθηση του ενός ως προς το άλλο. Την αντίσταση αυτή ονομάζουμε **τριβή**.

Έτσι, για να προκαλέσουμε ολίσθηση μεταξύ δύο πλακών οι οποίες εφάπτονται λόγω συμπίεσης, χρειάζεται να εφαρμόσουμε στις πλάκες ορισμένες δυνάμεις, για να ξεπεράσουμε τις αντιστάσεις που προέρχονται από την τριβή.

Την έρευνα πάνω στην τριβή μεταξύ δύο εφάπτομένων ξηρών επιφανειών έκανε πρώτος ο Coulomb. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών μπορούν να συνοψιστούν στους παρακάτω νόμους:

1. Η ολική τριβή είναι ανεξάρτητη από την έκταση των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.
2. Η ολική τριβή είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια επαφής και
3. Για μικρές ταχύτητες ολίσθησης, η ολική τριβή είναι πρακτικά ανεξάρτητη από τις ταχύτητες αυτές. Ωστόσο τα πειράματα δείχνουν ότι η δύναμη F , που είναι απαραίτητη για την **έναρξη** της ολίσθησης, είναι μεγαλύτερη από εκείνη που χρειάζεται για τη **διατήρηση** της ολίσθησης αυτής.

Οι παραπάνω νόμοι μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά με τον τύπο

$$F = \mu \cdot N$$

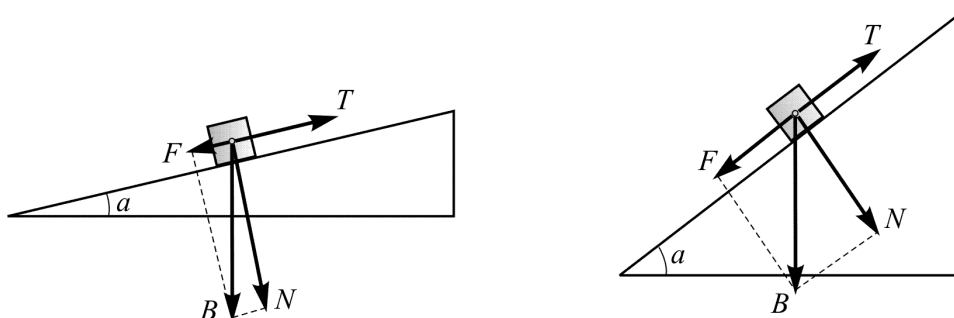
όπου μ είναι σταθερός αδιάστατος αριθμός, που ονομάζεται **συντελεστής τριβής**.

Αν ως δύναμη F θεωρήσουμε εκείνη που χρειάζεται για την **έναρξη** της ολίσθησης, ο αριθμός μ ονομάζεται συντελεστής **στατικής** τριβής. Αν όμως F είναι η ελαφρά μικρότερη δύναμη που απαιτείται για τη **διατήρηση** της ολίσθησης που ήδη άρχισε, τότε ο μ ονομάζεται συντελεστής **κινητικής** τριβής.

Και οι δύο συντελεστές ποικίλλουν αρκετά, ανάλογα με τη φύση και τις συνθήκες των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

9.1 – Γωνία τριβής

Πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, του οποίου η κλίση είναι πολύ μικρή, θέτουμε ένα σώμα και παρατηρούμε ότι τούτο ηρεμεί.



Σχ. 9_1 Μεταβολή της συνιστώσας του βάρους σε σχέση με την κλίση του επιπέδου

Η συνιστώσα F του βάρους B του σώματος κατά τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου δεν μπορεί να κινήσει το σώμα προς τα κάτω, επειδή υπάρχει η στατική τριβή T που εμφανίζεται από τη στιγμή που το σώμα ηρεμεί ως προς το κεκλιμένο επίπεδο.

Το σώμα θα ισορροπεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο εφ' όσον ισχύει η σχέση

$$F \leq T$$

Αν όμως η γωνία α του κεκλιμένου επιπέδου αυξάνεται συνέχεια, θα παρατηρήσουμε ότι για μια ορισμένη τιμή της α , το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει ομαλά. Η τιμή αυτή της γωνίας α ονομάζεται **γωνία τριβής**. Τότε η συνιστώσα F του βάρους του σώματος είναι ίση και αντίθετη προς την τριβή ολίσθησης T και ισχύουν οι σχέσεις:

$$T = F \quad \text{και} \quad T = \mu \cdot N$$

Επειδή όμως είναι $F = B \cdot \eta\mu\alpha$ και $N = B \cdot \sigma\upsilon\eta\alpha$, προκύπτει ότι

$$\mu = T/N = B \cdot \eta\mu\alpha / B \cdot \sigma\upsilon\eta\alpha. \quad \text{Άρα} \quad \mu = \epsilon\phi\alpha,$$

και συνεπώς ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ισούται με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας τριβής.

9.2 – Τριβή κύλισης

Είναι φανερό ότι η προσπάθεια που καταβάλλουμε για την κύλιση ενός σώματος σε μια επιφάνεια είναι πολύ μικρότερη από εκείνη που καταβάλλουμε για την ολίσθηση της ίδιας μάζας στην ίδια επιφάνεια.

Γι αυτό στις διάφορες εφαρμογές προσπαθούμε γενικά να έχουμε κύλιση αντί για ολίσθηση (τροχοί, ρουλεμάν κλπ).

Η τριβή που αναπτύσσεται όταν ένα στερεό σώμα κυλίεται πάνω σε άλλο στερεό ονομάζεται **τριβή κύλισης**. Είναι ανάλογη προς την κάθετη δύναμη N και εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών.

Η τριβή κύλισης έχει ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη της κίνησης των διαφόρων οχημάτων.

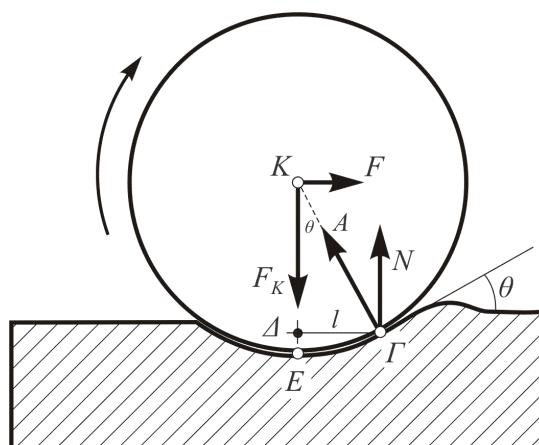
Ονομάζεται συντελεστής έλξης ενός οχήματος, ο λόγος της δύναμης έλξης του οχήματος με ομαλή κίνηση, προς την κάθετη δύναμη, με την οποία το όχημα πιέζει το δρόμο. Δηλαδή

$$\varphi = F_{\varepsilon}/N$$

Για την κύλιση τροχών με σιδερένια στεφάνη πάνω σε κοινό δρόμο, ο συντελεστής έλξης είναι περίπου 0,03, ενώ για σιδηροδρομικά οχήματα 0,004.

9.3 – Προσδιορισμός της τριβής κύλισης

Στο σχήμα 9_2 εμφανίζεται μια κατακόρυφη τομή κυλίνδρου, ο οποίος κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος δεν τίθεται σε κίνηση, αν η ελκτική δύναμη F δεν αποκτήσει μια ορισμένη τιμή.



Σχ. 9_2

Εκτός από τη δύναμη F , ενεργούν πάνω στον κύλινδρο η κατακόρυφη δύναμη F_K του βάρους του και η αντίδραση A του επιπέδου στήριξης.

Δεχόμενοι την ισορροπία του συστήματος, η A θα είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των F_K και F .

Αν l είναι η απόσταση $\Gamma\Delta$ και N η κατακόρυφη συνιστώσα της A , η ροπή της N ως προς τον άξονα K , είναι

$$M_K = N \cdot l.$$

Η ροπή αυτή αντιστέκεται στην κίνηση και ονομάζεται **ροπή κύλισης**.

Αλλά προφανώς είναι

$$F_K = N \quad \text{Άρα} \quad M_K = F_K \cdot l.$$

Δηλαδή η ροπή κύλισης M_K είναι ανάλογη προς τη δύναμη F_K με την οποία ο κύλινδρος πιέζει το επίπεδο. Το l είναι εδώ ο συντελεστής **τριβής κύλισης** και παριστάνει **μήκος**.

Για να κυλίεται ο κύλινδρος με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει η F να δίνει ροπή ίση και αντίθετη προς τη M_K .

Θεωρώντας τις ροπές ως προς το στιγμιαίο άξονα E που βρίσκεται κάτω από τον K , αν R η ακτίνα, θα έχουμε:

$$F \cdot R = N \cdot l = F_K \cdot l$$

$$\text{Άρα:} \quad F = \frac{l}{R} F_K.$$

9.4 – Μέτρηση του συντελεστή τριβής κύλισης

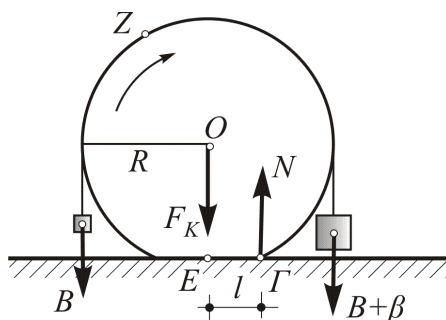
Ο συντελεστής της τριβής κύλισης μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί με την παρακάτω διαδικασία που παρουσιάζεται στο σχήμα 9_3.

Τοποθετούμε τον κύλινδρο του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το συντελεστή τριβής κύλισης, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Σε σημείο Z της επιφάνειάς του, στερεώνεται νήμα, στα άκρα του οποίου εξαρτώνται δύο ίσα βάρη B . Στο ένα από αυτά βάζουμε μικρά πρόσθετα βάρη β , μέχρις ότου πετύχουμε την κατάργηση της ηρεμίας του κυλίνδρου.

Έστω N η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης του επιπέδου, που εφαρμόζεται σε σημείο, έστω Γ . Η ΓE είναι τότε ο ζητούμενος συντελεστής τριβής κύλισης l .

Αν F_K είναι το βάρος του κυλίνδρου, παίρνοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, που ενεργούν πάνω στον κύλινδρο, κατά τη στιγμή κατάργησης της ηρεμίας, ως προς το σημείο E , θα έχουμε:

$$(\Sigma M)_E^{\perp+} = 0 \Rightarrow -B \cdot R - N \cdot l + (B + \beta)R = 0 \Rightarrow N \cdot l = \beta \cdot R \quad (i)$$



Σχ. 9_3

Η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης θα προκύψει από το μηδενισμό των κατακόρυφων δυνάμεων

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow N - B - F_K - (B + \beta) = 0 \Rightarrow N = F_K + 2B + \beta.$$

Από την (i) υπολογίζουμε τώρα την τιμή του l

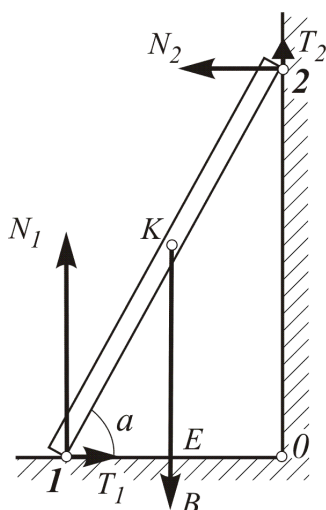
$$l = \frac{\beta \cdot R}{F_K + 2B + \beta}.$$

9.5 – Παράδειγμα

Η ομογενής σκάλα του σχήματος 9_4 στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σε κάθε άκρο της σκάλας είναι $\mu = 0,25$. Να υπολογιστεί η ελάχιστη γωνία την οποία πρέπει να σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο, χωρίς αυτή να ολισθαίνει, α) αναλυτικά και β) γραφικά.

Λύση

α) Έστω α η μικρότερη γωνία την οποία πρέπει να σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο, ώστε να ισορροπεί.



Σχ. 9_4

Στα άκρα **1** και **2** της σκάλας, όπου αυτή στηρίζεται στο δάπεδο και στον τοίχο αντίστοιχα, αναπτύσσονται αντιδράσεις. Κάθε μια από αυτές τις αντιδράσεις αναλύεται σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

Έτσι, πάνω στη σκάλα ενεργούν συνολικά (5) ομοεπίπεδες δυνάμεις:

Το γνωστό βάρος B της σκάλας και οι (4) άγνωστες συνιστώσες N_1 , T_1 και N_2 , T_2 των αντιδράσεων της στα σημεία στήριξης 1 και 2.

Η άγνωστη γωνία α μαζί με τις (4) συνιστώσες, θα βρεθούν ουσιαστικά από την επίλυση συστήματος (5) εξισώσεων, εκ των οποίων οι (3) θα

εκφράζουν την ισορροπία της σκάλας, ενώ για κάθε στήριξη θα υπάρχει (1) σχέση που συνδέει τις συνιστώσες μεταξύ τους μέσω του συντελεστή τριβής.

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$$(\Sigma M)_{2^{\perp+}} = 0 \Rightarrow N_1(01) - T_1(02) - B(0E) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow N_1 + T_2 - B = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow T_1 - N_2 = 0 \quad (3)$$

$$T_1 = \mu \cdot N_1 \quad (4)$$

$$T_2 = \mu \cdot N_2 \quad (5)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, οι (2) και (3) γίνονται αντίστοιχα λόγω των (4) και (5):

$$(2): N_1 + \mu N_2 = B \quad (2')$$

$$(3): \mu N_1 = N_2 \quad (3')$$

Θέτοντας στη (2') την τιμή της N_2 που προκύπτει από την (3'), παίρνουμε

$$N_1 + \mu^2 N_1 = B \quad \text{ή} \quad N_1(1 + \mu^2) = B \quad (2'')$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο (102) βρίσκουμε

$$(01) = (12)\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (02) = (12)\eta\mu\alpha \quad \text{και} \quad OE = \frac{(10)}{2} = \frac{(21)}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$N_1(12)\sigma\upsilon\nu\alpha - T_1(12)\eta\mu\alpha - B(12)\sigma\upsilon\nu\alpha/2 = 0$$

$$\text{ή} \quad 2N_1\sigma\upsilon\nu\alpha - 2T_1\eta\mu\alpha - B\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$$

Στην εξίσωση αυτή, αν αντικαταστήσουμε την τιμή της T_1 από την (4) και της B από την (2''), παίρνουμε:

$$2N_1\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\mu N_1\eta\mu\alpha - N_1(1 + \mu^2)\sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \quad \text{ή}$$

$$2\mu\eta\mu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu\alpha - (1 + \mu^2)\sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \quad \text{ή}$$

$$2\mu\eta\mu\alpha = (2 - 1 - \mu^2)\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}$$

Στην τελευταία σχέση, θέτοντας ήδη την τιμή του $\mu = 0,25$, βρίσκουμε

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{1 - 0,0625}{0,5} = 1,875.$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\alpha = 61^\circ 55' 39''$.

Σημείωση

α) Παρατηρούμε ότι η τιμή της γωνίας α εξαρτάται μόνο από το συντελεστή τριβής ολίσθησης μ και είναι ανεξάρτητη από το βάρος, το μήκος, τη διατομή και το ειδικό βάρος της σκάλας, μεγέθη, που άλλωστε και γι αυτό δε δόθηκαν.

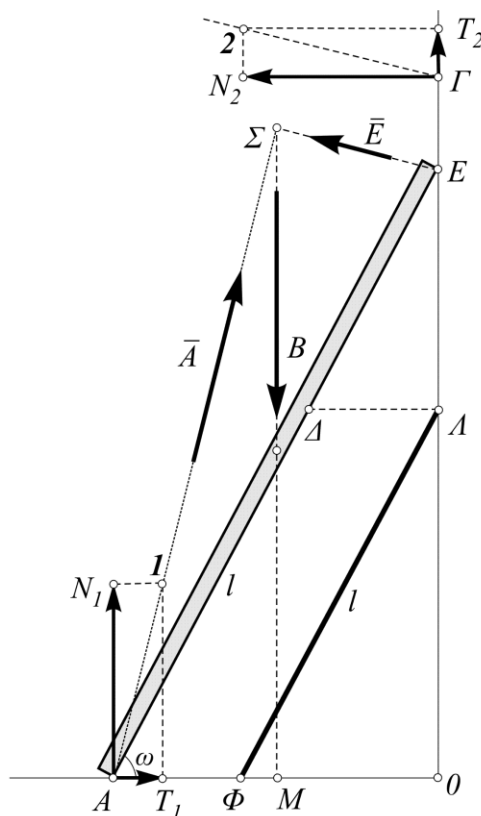
β) Το πρόβλημα είναι δυνατό να επιλυθεί γραφικά αν λάβουμε υπόψη:

i) ότι ο δοσμένος συντελεστής τριβής είναι ο λόγος της οριζόντιας προς την κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης που δημιουργείται στο σημείο επαφής της σκάλας με την επιφάνεια τριβής, και

ii) ότι οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στα σημεία στήριξης της σκάλας, οφείλουν να τέμνονται πάνω στο φορέα της δύναμης που εκφράζει το βάρος της σκάλας. Η δύναμη αυτή είναι φανερό ότι περνά κατακόρυφα από το μέσον του μήκους της.

Συνεπώς, ανεξάρτητα από το μήκος της σκάλας, η όλη προσπάθεια βρίσκεται στον προσδιορισμό της γωνίας που θα πρέπει αυτή να σχηματίζει με τον οριζόντιο ή κατακόρυφο τοίχο, έτσι ώστε οι (3) αυτές δυνάμεις να είναι **συντρέχουσες**. Τότε φυσικά η συνισταμένη των αντιδράσεων της σκάλας θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη του βάρους της.

Για τη γραφική κατασκευή εργαζόμαστε ως εξής:



Σχ. 9_5 Γραφική επίλυση της ελάχιστης γωνίας στήριξης της σκάλας

Από τυχόν σημείο A του δαπέδου, που το θεωρούμε σαν σημείο στήριξης της σκάλας, ορίζουμε τη διεύθυνση της αντίδρασης A_1 , έτσι ώστε η κατακόρυφη συνιστώσα της AN_1 να είναι τετραπλάσια της οριζόντιας AT_1 ($AT_1 = 0,25 AN_1$).

Επειδή η σκάλα στηρίζεται στο οριζόντιο δάπεδο και στον κατακόρυφο τοίχο, έπεται ότι η οριζόντια προβολή της είναι το τμήμα OA . Συνεπώς αν φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA , βρίσκουμε το σημείο τομής της Σ με την A_1 .

Με διαδικασία ανάλογη της προηγούμενης, ορίζουμε τη διεύθυνση Γ_2 , έτσι ώστε η $\Gamma T_2 (= 0,25 \cdot \Gamma N_2)$ να είναι προς τα πάνω.

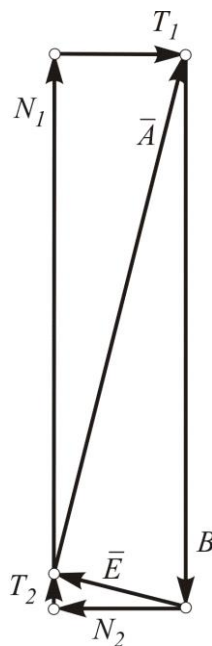
Από το Σ φέρνουμε την παράλληλη της Γ_2 , ορίζοντας έτσι το σημείο E στον κατακόρυφο τοίχο.

Έτσι προέκυψε το τυχόν μήκος AE της σκάλας, η οποία ισορροπεί σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, σχηματίζοντας τη ζητούμενη γωνία ω , η οποία μετρούμενη με μοιρογνώνιο προκύπτει $\omega = 62^\circ$.

Παρατηρήσεις

1. Αν δίνεται το μήκος l της σκάλας, τότε είναι εύκολη η τελική της θέση $\Phi\Lambda$. Πραγματικά, αν πάρουμε πάνω στην AE το τμήμα $A\Delta = l$ και από το Δ φέρουμε παράλληλη της OA , ορίζουμε στην OE το Λ , από όπου φέρνουμε τελικά τη $\Lambda\Phi$ παράλληλη της AE .

2. Όμοια, αν δίνεται το βάρος B της σκάλας, τότε είναι πολύ εύκολος ο προσδιορισμός των αντιδράσεων \bar{A} και \bar{E} στις στηρίξεις της, με τις οριζόντιες και κατακόρυφες προβολές τους, όπως φαίνεται με σαφήνεια στο δυναμοτρίγωνο του επομένου σχήματος, 9_6.



Σχ. 9_6

Έτσι, αν $\mathbf{B} = 100 \text{ N}$, προκύπτουν:

$$\bar{A} = 97 \text{ N} \quad \text{και} \quad \bar{E} = 24 \text{ N},$$

με προβολές αντίστοιχα

$$\text{οριζόντιες:} \quad T_1 = 23,5 \text{ N} \quad N_2 = 23,5 \text{ N}$$

$$\text{κατακόρυφες:} \quad N_1 = 94 \text{ N} \quad T_2 = 6 \text{ N}$$

3. Οι τιμές αυτές επαληθεύονται και από αναλυτικές σχέσεις που ήδη βρήκαμε. Έτσι από:

$$(2'') \Rightarrow N_1 = \frac{B}{1 + \mu^2} = \frac{100}{1 + 0,0625} = \underline{94,12 \text{ N}}$$

$$(4) \Rightarrow T_1 = \mu \cdot N_1 = 0,25 \cdot 94,12 = \underline{23,53 \text{ N}}$$

$$(3) \Rightarrow N_2 = T_1 = \underline{23,53 \text{ N}}$$

$$(5) \Rightarrow T_2 = \mu \cdot N_2 = 0,25 \cdot 23,53 = \underline{5,88 \text{ N}}.$$

Κεφάλαιο 10^ο

Αρχή των δυνατών έργων

Η αρχή των δυνατών έργων αποτελεί στη Μηχανική μια από τις ωραιότερες και απλούστερες μεθόδους για την επίλυση υπερστατικών φορέων. Αλλά και στις διάφορες εφαρμογές της Στατικής, ιδίως στη Μηχανολογία, είναι δυνατόν να εμφανίζονται τα παρακάτω προβλήματα:

α) Εύρεση των συνθηκών ισορροπίας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων που ενώνονται μεταξύ τους με συνδέσμους και φορτίζονται με εξωτερικές δυνάμεις,

β) Καθορισμός των δυνατών θέσεων ισορροπίας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων, στην περίπτωση που αυτό (το σύστημα) έχει κάποια ελευθερία κίνησης.

Το πρώτο είδος του προβλήματος ανάγεται στον υπολογισμό των αντιδράσεων που εμφανίζονται στις στηρίξεις ή στους συνδέσμους του συστήματος, που γνωρίσαμε ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει το δεύτερο είδος του προβλήματος, το οποίο θ' αντιμετωπίσουμε με τη χρήση της έννοιας του **έργου** δύναμης.

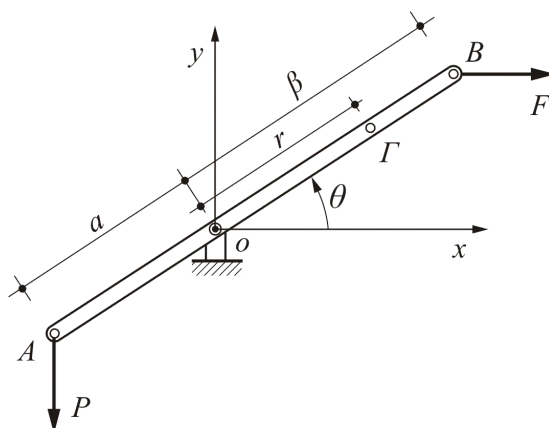
Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου των δυνατών έργων έγκειται στο γεγονός ότι για την επίλυση ενός προβλήματος όταν έχουμε ένα σύστημα σωμάτων όπου δεν εμφανίζεται τριβή, δεν είναι απαραίτητη η αποσύνθεση του συστήματος σε μικρότερα τμήματα για τον υπολογισμό των αντιδράσεων ή εσωτερικών δυνάμεων.

10.1 – Δυνατές μετατοπίσεις

Θεωρούμε το μοχλό του σχήματος 10_1, ο οποίος στηρίζεται στο O με άρθρωση, ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον δια του O άξονα κάθετα στο επίπεδο xOy .

Στα άκρα A και B του μοχλού ενεργούν οι δυνάμεις P και F οι οποίες κείνται στο επίπεδο xOy .

Η θέση του μοχλού καθορίζεται με ακρίβεια από τη γωνία θ που σχηματίζει με τον άξονα Ox του επιπέδου περιστροφής του.



Σχ. 10_1

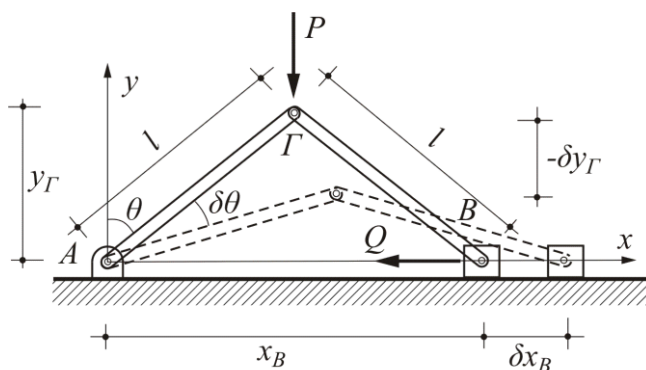
Επομένως αν οι δυνάμεις P και F είναι γνωστές, τότε υπάρχει μια θέση ισορροπίας του μοχλού, που προσδιορίζεται από τη γωνία θ , η οποία αποτελεί και το ζητούμενο μέγεθος.

Επειδή το μοναδικό είδος κίνησης του συστήματος είναι η στροφή του γύρω από τον άξονα που περνάει από το O , λέμε ότι το σώμα έχει **ένα βαθμό ελευθερίας**, ενώ τη γωνία θ , που καθορίζει τη θέση του, ονομάζουμε **παράμετρο του συστήματος**.

Για να μελετήσουμε στη συνέχεια την ισορροπία του, πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο μοχλός δέχεται κάποια απειροστή μετακίνηση από τη θέση εκείνη που έχει καθοριστεί σαν θέση ισορροπίας του.

Τέτοια μετακίνηση μπορούμε να πάρουμε δίνοντας στη γωνία θ κάποια απειροστή μεταβολή (αύξηση ή ελάττωση), $\delta\theta$. Είναι φανερό ότι κατά τη μεταβολή αυτή της γωνίας θ , κάθε σημείο Γ του μοχλού που απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής, μετατοπίζεται κατά απειροστό κυκλικό τόξο, μήκους $r \cdot \delta\theta$, που μπορεί να θεωρηθεί σαν ευθύγραμμο απειροστό τμήμα κάθετο στην ακτίνα $O\Gamma$.

Τέτοιες απειροστές μετατοπίσεις ονομάζονται **δυνατές μετατοπίσεις**. Έτσι οι δυνατές μετατοπίσεις για τα σημεία A και B του μοχλού, είναι αντίστοιχα $\alpha \cdot \delta\theta$ και $\beta \cdot \delta\theta$, κάθετες στον άξονα AB του μοχλού και αντίθετα κατευθυνόμενες.



Σχ. 10_2

Θεωρούμε τώρα το σύστημα των δύο ίσων ράβδων ΑΓ και ΓΒ του σχήματος 10_2, που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους, έτσι, ώστε με την κατακόρυφη δράση της Ρ, η άρθρωση Β να μετακινεί οριζόντια το σώμα με το οποίο συνδέεται, με δύναμη Q.

Η διάταξη έχει ένα βαθμό ελευθερίας, τη στροφή της ράβδου ΑΓ γύρω από την άρθρωση Α. Επομένως η θέση της καθορίζεται με την τιμή της γωνίας θ, η οποία στην προκειμένη περίπτωση, αποτελεί την παράμετρο του συστήματος.

Για τον υπολογισμό των δυνατών μετατοπίσεων που εμφανίζονται στα διάφορα σημεία του συστήματος, δίνουμε στην παράμετρο θ απειροστή αύξηση δθ, οπότε το σημείο Β θα μετατοπιστεί οριζόντια κατά δx_B, ενώ ταυτόχρονα το Γ θα μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά δy_Γ.

Οι μετατοπίσεις αυτές υπολογίζονται από τις σχέσεις που εκφράζουν τις αποστάσεις των σημείων Β και Γ αντίστοιχα από τους άξονες γ και χ συναρτήσει της γωνίας θ, διαφορίζοντας ως προς θ.

Έτσι, από τις σχέσεις

$$x_B = 2l\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad y_\Gamma = l\sigma\upsilon\nu\theta,$$

ύστερα από διαφόριση ως προς τη μεταβλητή γωνία θ, προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$\delta x_B = 2l\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \delta\theta \quad \text{και} \quad \delta y_\Gamma = -l\eta\mu\theta \cdot \delta\theta$$

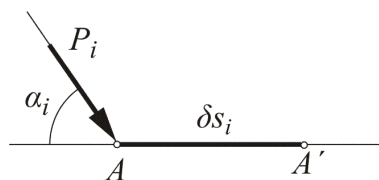
Από τα δύο παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτει ότι ο υπολογισμός των δυνατών μετατοπίσεων για τα διάφορα σημεία ενός συστήματος με κινητά μέρη, είναι πρόβλημα καθαρά γεωμετρικό.

10.2 – Δυνατά έργα

Ο υπολογισμός των δυνατών μετακινήσεων ενός συστήματος με κινητά μέρη που εκτέθηκε στην προηγούμενη ενότητα αποτελεί το πρώτο και σημαντικότερο στάδιο για τον προσδιορισμό του σχήματος ισορροπίας ενός τέτοιου συστήματος.

Για την ολοκλήρωση όμως του σκοπού αυτού θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του **έργου** μιας **δύναμης**.

Θεωρούμε τη δύναμη Ρ_ι του σχήματος 10_3, που εφαρμόζεται στο σημείο Α, το οποίο μετακινείται κατά απειροστό μήκος δs_ι πάνω στη διεύθυνση της ΑΑ'. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δύναμη Ρ_ι **παρήγαγε έργο**, το οποίο ορίζεται σα γινόμενο της μετατόπισης δs_ι επί την προβολή Ρ_ι-συναί της δύναμης πάνω στη διεύθυνση της μετατόπισης αυτής.



Σχ. 10_3

Αν λοιπόν ονομάσουμε δU_i το έργο της δύναμης P_i κατά τη μετατόπιση δs_i , τότε θα έχουμε

$$\delta U_i = P_i \cdot \sigma \nu \alpha_i \cdot \delta s_i. \quad (\alpha)$$

Η απειροστή αυτή μεταβολή του έργου έχει διαστάσεις «δύναμη \times μήκος» και είναι θετική μόνον όταν η προβολή της δύναμης και η μετατόπιση έχουν την ίδια φορά.

Επομένως το έργο είναι μέγεθος βαθμωτό και εκφράζεται συνήθως σε $\text{kp}\cdot\text{cm}$ ή $\text{kN}\cdot\text{m}$, σε αντίθεση με τη ροπή, που αν και έχει τις ίδιες διαστάσεις, είναι διανυσματικό μέγεθος. (Το έργο είναι το εσωτερικό γινόμενο δύναμης επί απόσταση, ενώ η ροπή είναι το εξωτερικό γινόμενο αυτών).

Το έργο που παράγει συνολικά η P_i αν μετατοπίσει το σημείο A κατά μια διαδρομή s , προκύπτει αν ολοκληρώσουμε τη σχέση (α) σ' όλο το μήκος της διαδρομής. Δηλαδή

$$U_i = \int_s P_i \sigma \nu \alpha_i \delta s_i.$$

Για τον υπολογισμό της ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι γνωστή η σχέση μεταξύ των P_i , s_i και $\sigma \nu \alpha_i$, χωρίς να είναι απαραίτητο η διαδρομή s να είναι ευθεία γραμμή.

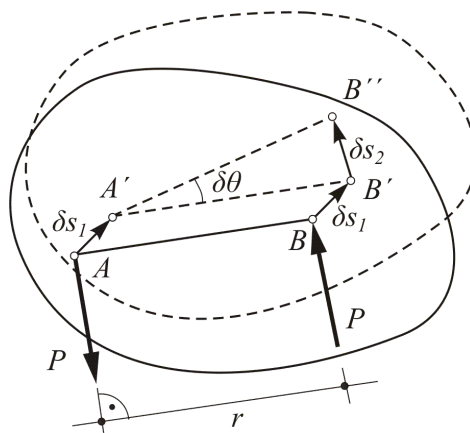
Όταν λοιπόν σε ένα κινητό σύστημα στερεών σωμάτων, όπου ενεργεί εξωτερικά ένα σύστημα δυνάμεων, δοθεί μια απειροστή μετατόπιση, τότε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετατοπίζονται, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις να εκτελούν μικρές ποσότητες έργων, τα οποία ονομάζονται **δυνατά έργα**.

Αν στο ίδιο υλικό σημείο δρουν περισσότερες από μια δυνάμεις, τότε το έργο της συνισταμένης ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.

Κατά τη μετατόπιση ενός σώματος, το έργο της βαρύτητας ισούται με το γινόμενο του βάρους του σώματος επί την κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης του κέντρου βάρους του. Είναι ανεξάρτητο του δρόμου και είναι θετικό για κίνηση του σώματος προς τα κάτω, αρνητικό για κίνηση προς τα πάνω και μηδέν για οριζόντια κίνηση ή κλειστή τροχιά.

Τέλος, στο σχήμα 10_4, θεωρούμε την περίπτωση **ζεύγους** δυνάμεων, το οποίο ενεργεί σ' ένα σώμα, προκαλώντας έτσι τη μετακίνησή του. Αν A και

B είναι τα σημεία όπου ασκούνται οι δυνάμεις, εμφανίζοντας μια ροπή $M = P \cdot r$, κατά τη μετακίνηση του σώματος, τα σημεία αυτά θα καταλάβουν τελικά τις θέσεις A' και B'' αντίστοιχα.



Σχ. 10_4

Η νέα θέση του σώματος μπορεί να θεωρηθεί σαν επαλληλία μιας παράλληλης μετατόπισης κατά το διάνυσμα $AA' = BB'$ και μιας περιστροφής γύρω από το A' κατά τη γωνία $\delta\theta$.

Κατά την παράλληλη μετατόπιση, το έργο που παράγεται από τη δύναμη P είναι ίσο και αντίθετο προς το έργο που παράγει η $-P$ και επομένως το άθροισμά τους είναι μηδέν.

Κατά το στάδιο της περιστροφής του σώματος γύρω από το A' , έργο παράγει μόνον η δύναμη P . Το έργο αυτό είναι

$$dU = P \cdot ds_2 = P \cdot (r \cdot \delta\theta) = M \cdot \delta\theta, \quad (\beta)$$

όπου η γωνία $\delta\theta$ εκφράζεται σε ακτίνια.

Το παραγόμενο έργο είναι θετικό όταν η στροφή του σώματος γίνεται ομόφορα προς το ζεύγος και αρνητική κατά την αντίθετη φορά.

10.3 – Η αρχή των δυνατών έργων

Όταν μια δύναμη ή μια ροπή παράγει δυνατό έργο που υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (α) ή (β) αντίστοιχα της προηγούμενης ενότητας, δεχόμαστε ότι το μέτρο της παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της μετατόπισης ή της στροφής του σώματος.

Επίσης κατά τη μελέτη ενός κινητού συστήματος στερεών σωμάτων υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές στις διάφορες αρθρώσεις, έδρανα, τριβείς κλπ. των αξόνων, ούτε στις διάφορες ολισθήσεις μεταξύ επιφανειών.

Δεχόμαστε επίσης ότι τα διάφορα μέρη, από τα οποία αποτελείται το σύστημα είναι απόλυτα στερεά σώματα.

Τέτοια συστήματα ονομάζονται **ιδεώδη συστήματα**. Σ' αυτά μόνο οι δυνάμεις που δρουν εξωτερικά παράγουν έργο κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης του συστήματος.

Πραγματικά, οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του σώματος δεν παράγουν έργο, αφού πάντοτε εμφανίζονται κατά ζεύγη ίσων και αντιθέτων δυνάμεων και συνεπώς το ολικό τους έργο σε οποιαδήποτε μετατόπιση είναι μηδέν.

Για τα ιδεώδη αυτά συστήματα δεχόμαστε ότι ισχύει η παρακάτω **αρχή των δυνατών έργων**:

Αν για κάθε δυνατή μετατόπιση ενός ιδεώδους συστήματος, το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις είναι μηδέν, τότε το σύστημα ισορροπεί.

Έχοντας υπόψη τις σχέσεις (α) και (β) για το δυνατό έργο μιας δύναμης ή μιας ροπής, η παραπάνω αρχή μπορεί να διατυπωθεί αναλυτικά με την εξίσωση

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow \sum P_i \sin \alpha_i \delta s_i + \sum M_i \delta \theta_i = 0 \quad (\gamma)$$

Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, παρουσιάζει δυο σημαντικά πλεονεκτήματα.

α) Δεν είναι απαραίτητη η αποσύνθεση του συστήματος σε μικρότερα τμήματα, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας του κάθε τμήματος και

β) Οι σχέσεις μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία του συστήματος, μπορούν να καθοριστούν απευθείας, χωρίς την παρεμβολή των αντιδράσεων.

Τα πλεονεκτήματα αυτά κάνουν την εφαρμογή της αρχής αυτής χρήσιμη για τον προσδιορισμό της θέσης ισορροπίας οποιουδήποτε κινητού συστήματος στερεών σωμάτων (ιδεώδους) όπου ενεργούν γνωστά εξωτερικά φορτία.

10.4 – Παραδείγματα

1

Για την περίπτωση του μοχλού που φαίνεται στο σχήμα της ενότητας 9.1, να προσδιοριστεί η γωνία θ , για την οποία η ράβδος AB ισορροπεί.

Λύση

Εφαρμόζοντας τη σχέση (γ) που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων για τις δυνάμεις P και F του σχήματος που εφαρμόζονται αντίστοιχα στα σημεία A και B του μοχλού, έχουμε:

$$\sum P_i \cdot \sigma \nu \alpha_i \delta s_i = 0 \Rightarrow P \cdot \sigma \nu \theta \cdot \delta s_p - F \eta \mu \theta \cdot \delta s_F = 0$$

$$\text{όπου } \delta s_p = \alpha \delta \theta \quad \text{και} \quad \delta s_F = \beta \delta \theta$$

είναι οι μετακινήσεις των σημείων A και B κάθετα προς την AB . Άρα

$$P \sigma \nu \theta \cdot \alpha \cdot \delta \theta = F \eta \mu \theta \cdot \beta \cdot \delta \theta \Rightarrow \epsilon \phi \theta = \frac{P \cdot \alpha}{F \cdot \beta}.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση

$$F \cdot \beta \eta \mu \theta - P \cdot \alpha \sigma \nu \theta = 0,$$

που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων, ουσιαστικά παριστάνει το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο A , δηλαδή τη σχέση $(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0$.

Επομένως η αρχή των δυνατών έργων στο συγκεκριμένο αυτό πρόβλημα, λόγω άλλωστε της απλότητάς του, δεν προσφέρει τίποτα το ιδιαίτερο.

2

Για την περίπτωση των δύο ίσων ράβδων, στο σχήμα της ίδιας ενότητας 9.1, ζητείται να υπολογιστεί το μέγεθος της δύναμης Q η οποία πρέπει να ωθήσει το σώμα της κινητής άρθρωσης B , ώστε το σύστημα των ράβδων να ισορροπεί. (Δυνάμεις τριβής δε θα ληφθούν υπόψη).

Λύση

Χρησιμοποιούμε πάλι τη σχέση (γ) της αρχής των δυνατών έργων μόνο για τις δυνάμεις P και Q , αφού οι αντιδράσεις, τόσο στην άρθρωση όσο και στην κύλιση δεν παράγουν έργο.

Έτσι, συνδυάζοντας τις σχέσεις που ήδη βρέθηκαν και εκφράζουν τις μετατοπίσεις δy_Γ και δx_B των σημείων Γ και B αντίστοιχα όπου εφαρμόζονται οι δυνάμεις P και Q , έχουμε:

$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow P \delta y_\Gamma - Q \delta x_B = 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο του δy_Γ εκφράζει τη μείωση της απόστασης του Γ με την αύξηση της γωνίας θ , και φυσικά δεν σχετίζεται με το πρόσημο του έργου που παράγει η P , επειδή αυτό είναι θετικό μόνον όταν η δύναμη είναι

ομόφορη προς τη μετατόπιση που πραγματοποιεί. Έτσι προέκυψε το αρνητικό πρόσημο του έργου της Q , οπότε η εξίσωση γίνεται

$$P \cdot l \cdot \eta \mu \theta \cdot \delta \theta - Q \cdot 2l \cdot \sigma \nu \theta \cdot \delta \theta = 0,$$

από όπου προκύπτει

$$Q = \frac{P}{2} \varepsilon \phi \theta.$$

Παρατήρηση

Στο παράδειγμα αυτό φαίνονται ήδη τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Πραγματικά, η δύναμη Q , η οποία στην περίπτωση που ο μηχανισμός των ράβδων ήταν τριαρθρωτός φορέας θα έπαιζε το ρόλο οριζόντιας αντίδρασης στο A ή B , βρέθηκε χωρίς να ληφθούν υπόψη οι αντιδράσεις.

Αν η φορά της Q είχε τεθεί αυθαίρετα ομόφορη προς τη μετατόπιση που προκαλεί, τότε το πρόσημό της θα προέκυπτε αρνητικό. Αυτό θα σήμαινε τότε, ότι η σωστή φορά της είναι αντίθετη από αυτή που αρχικά είχε ληφθεί.

Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων είναι χρήσιμη γενικά στις περιπτώσεις όπου έχουμε φορείς με κινητά βασικά μέρη, αρκεί να υπάρχουν απλές γεωμετρικές σχέσεις που να συνδέουν τις δυνατές μετακινήσεις των σημείων εκείνων, στα οποία εφαρμόζονται οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο.

3

Στο παρακάτω σχήμα 10_5 εικονίζεται μια πρέσσα, στη χειρολαβή της οποίας ενεργεί το ζεύγος των δυνάμεων P , με ροπή $M = 2P \cdot a$.

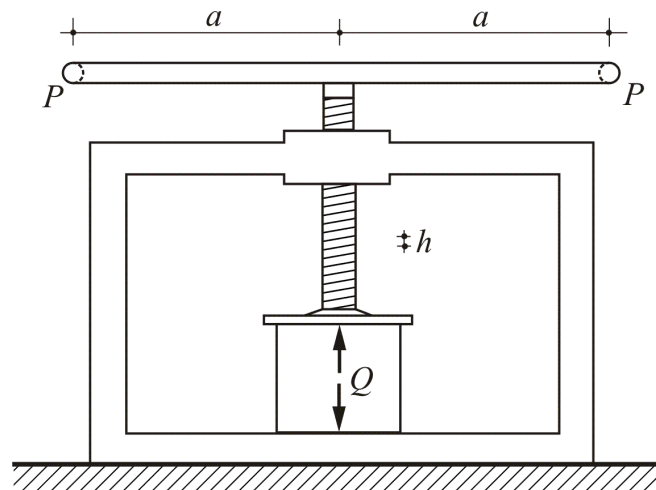
Αν h είναι το βήμα του σπειρώματος του κοχλία της πρέσας, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις δυνάμεις P του ζεύγους με την αντίδραση Q της πρέσας.

Λύση

Θεωρούμε ότι το θλιβόμενο σώμα έχει αντικατασταθεί με τις αντιδράσεις Q τις οποίες ασκεί πάνω στον κοχλία και το πλαίσιο μηχανής.

Οι δυνάμεις αυτές θα πρέπει να θεωρηθούν ως εξωτερικές δυνάμεις του ιδεώδους συστήματος που αποτελείται από το πλαίσιο και τον κοχλία, τα οποία δεχόμαστε σαν απόλυτα στερεά σώματα.

Μια δυνατή μετατόπιση του συστήματος που να συμβιβάζεται με τους συνδέσμους του, είναι, όπως θα περίμενε κανείς, μια απειροστή στροφή $\delta\theta$ του κοχλία, κατά την οποία, από το ζεύγος των δυνάμεων παράγεται έργο



Σχ. 10_5

$$\delta U_1 = M \cdot \delta\theta = 2P \cdot a \cdot \delta\theta .$$

Γνωστού όμως του βήματος h στο σπείρωμα του κοχλίου, έπεται ότι στη γωνία $\delta\theta$ αντιστοιχεί κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου του κοχλίου, που είναι

$$\delta s_2 = \frac{\delta\theta}{2\pi} h ,$$

και επομένως το έργο της δύναμης Q θα είναι αντίστοιχα

$$\delta U_2 = -Q \cdot \delta s_2 = -Q \cdot h \cdot \frac{\delta\theta}{2\pi} .$$

Το αρνητικό πρόσημο του έργου της Q οφείλεται στην αντίθετη φορά της με τη μετακίνηση δs_2 του κάτω άκρου του κοχλίου. Η προς τα κάτω δύναμη Q που ενεργεί στο πλαίσιο δεν παράγει έργο.

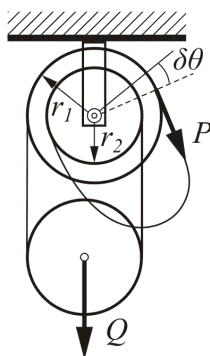
Έτσι θα έχουμε:

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow 2Pa\delta\theta - Qh \frac{\delta\theta}{2\pi} = 0 , \text{ από όπου προκύπτει}$$

$$Q = \frac{4a\pi}{h} P = \frac{2\pi}{h} M .$$

4

Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των δυνάμεων P και Q που ενεργούν στη διαφορική τροχαλία του επομένου σχήματος 10_6, όταν το σύστημα ισορροπεί.

Λύση

Σχ. 10_6

Αν η πάνω τροχαλία που δεν μετακινείται κατακόρυφα στραφεί γύρω από τον άξονά της κατά απειροστή γωνία $\delta\theta$, τότε το έργο της δύναμης P θα είναι

$$\delta U_1 = P \cdot \delta s_1 = P \cdot r_1 \cdot \delta\theta .$$

Ταυτόχρονα όμως, η κάτω τροχαλία που φέρει το βάρος Q , μετακινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, επειδή το νήμα έλξης είναι μεγαλύτερο από το νήμα απόλυσης.

Η διαφορά, H , ανάμεσα στα μήκη των δύο νημάτων, επειδή μοιράζεται σε δύο διαδρομές, συνεπάγεται την κατακόρυφη ανύψωση της τροχαλίας κατά

$$h = \frac{H}{2} = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \cdot \delta\theta ,$$

οπότε το έργο που παράγεται από το βάρος Q θα είναι

$$\delta U_2 = -Q \cdot h = -Q \frac{r_1 - r_2}{2} \cdot \delta\theta .$$

$$\text{Άρα } \sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot r_1 \delta\theta - Q \frac{r_1 - r_2}{2} \cdot \delta\theta = 0 ,$$

$$\text{οπότε } P = \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \cdot Q \quad \text{ή} \quad Q = \frac{2r_1}{r_1 - r_2} P .$$

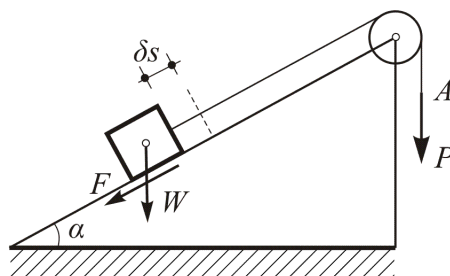
10.5 – Απόδοση απλών μηχανών

Σε όλες τις εφαρμογές της αρχής των δυνατών έργων που γνωρίσαμε ως τώρα, αναφερθήκαμε αποκλειστικά σε ιδεώδη συστήματα, όπου δεν υπάρχουν τριβές.

Αν και πολλές από τις μηχανές και συσκευές που χρησιμοποιούμε έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε να μπορούμε να αγνοούμε τις τριβές που παρουσιάζονται στα διάφορα εξαρτήματά τους, ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις, στις οποίες δεν έχουμε παρά να τις λάβουμε υπόψη.

Εφαρμόζοντας τότε την αρχή των δυνατών έργων, θα πρέπει, εκτός από το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις, να λαμβάνουμε υπόψη και το έργο των δυνάμεων τριβής.

Ας θεωρήσουμε τώρα για παράδειγμα το απλό σύστημα του σχήματος 10_7, που αποτελείται από κεκλιμένο επίπεδο με τροχαλία στην κορυφή του, για να μπορεί το βάρος W να σέρνεται προς τα άνω μέσω νήματος, από το βάρος P .



Σχ. 10_7

Αν η επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου δεν είναι λεία, τότε για τον υπολογισμό της δύναμης P που είναι απαραίτητη για να προκαλέσει την **έναρξη** της κίνησης του βάρους W , θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και την τριβή μεταξύ του βάρους W και της επιφάνειας του επιπέδου.

Έτσι, η εξίσωση που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων θα είναι

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot \delta s - W \eta \mu \alpha \cdot \delta s - F \cdot \delta s = 0, \quad (\alpha)$$

όπου δs είναι απειροστή κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου A του νήματος και F η δύναμη τριβής μεταξύ του σώματος W και του επιπέδου.

Αν μ είναι ο συντελεστής τριβής, η δύναμη F είναι

$$F = W \sigma \nu \alpha \cdot \mu.$$

Αγνοώντας τις τριβές της τροχαλίας, η εξίσωση (α) γράφεται

$$P \cdot \delta s - W \eta \mu \alpha \cdot \delta s - W \sigma \nu \alpha \cdot \mu \cdot \delta s = 0,$$

από την οποία προκύπτει

$$P = W(\eta \mu \alpha + \mu \sigma \nu \alpha) \quad (\beta)$$

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (α), το έργο $P \cdot \delta s$ που παράγεται από την εξωτερική δύναμη P κατά τη δυνατή μετατόπιση δs , χρησιμοποιείται όχι μόνο για την ανύψωση του βάρους W κατά το ύψος $\delta s \cdot \eta \mu \alpha$, αλλά και για την υπερνίκηση της τριβής.

Για το λόγο αυτό, το μεν έργο $W \eta \mu \alpha \cdot \delta s$ ονομάζεται **χρήσιμο έργο**, ο δε λόγος αυτού προς το **καταναλισκόμενο έργο** $P \cdot \delta s$ ονομάζεται **απόδοση μηχανής**.

Στο παράδειγμά μας μηχανή είναι το συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο που χρησιμοποιείται για ανύψωση βαρών W .

Αν λοιπόν με a παραστήσουμε την απόδοση της μηχανής του κεκλιμένου επιπέδου, θα είναι:

$$a = \frac{\text{Χρήσιμο έργο}}{\text{Καταναλισκόμενο έργο}} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\alpha}$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η απόδοση της μηχανής γίνεται ίση με μονάδα για $\mu = 0$, δηλαδή όταν έχουμε την ιδεώδη περίπτωση ανυπαρξίας τριβών, και ότι αυτή μειώνεται όσο αυξάνουν οι τιμές του συντελεστή μ .

Αν, αντί να ανυψώνουμε το σώμα W , το σέρναμε προς τα κάτω με δύναμη P παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο, τότε το μέτρο της απαραίτητης δύναμης P για την αντίστοιχη **έναρξη** της κίνησης προς τα κάτω, θα προέκυπτε από την εξίσωση

$$P \cdot \delta s + W\eta\mu\alpha \cdot \delta s - W\sigma\upsilon\alpha \cdot \mu \cdot \delta s = 0,$$

$$\text{δηλαδή } P = W(\mu\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha).$$

$$\text{Αν } \mu\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha = 0, \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\alpha = \mu,$$

δηλαδή η κλίση του επιπέδου προς το οριζόντιο επίπεδο είναι ίση με τη γωνία τριβής, έστω ϕ , η απαιτούμενη δύναμη για την έναρξη της κατολίσθησης είναι μηδέν.

Για κλίσεις μεγαλύτερες της γωνίας ϕ , το σώμα κατεβαίνει μόνο του. Όταν λοιπόν είναι $\alpha = \phi$, δηλαδή $\epsilon\phi\alpha = \mu$, τότε η απόδοση της μηχανής είναι

$$a = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \frac{1}{2}.$$

10.6 – Παραδείγματα

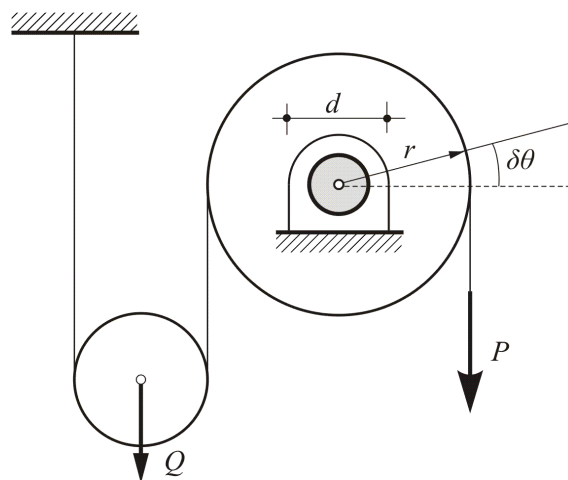
1 Στο σύστημα των δύο τροχαλιών του σχήματος 10_8 ανυψώνεται το βάρος Q με τη βοήθεια της δύναμης P . Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της μεγάλης τροχαλίας και του άξονά της είναι $\mu = 0,25$, η ακτίνα της τροχαλίας είναι $r = 28 \text{ cm}$ και η διάμετρος του άξονα $d = 8 \text{ cm}$, να υπολογιστούν:

α) Το μέγεθος της δύναμης P που απαιτείται για την ανύψωση του βάρους Q και

β) Η απόδοση της μηχανής.

Λύση

α) Κατά την εφαρμογή της δύναμης P , θεωρούμε απειροστή περιστροφή της μεγάλης τροχαλίας κατά $\delta\theta$. Τότε η δύναμη P παράγει έργο



Σχ. 10_8

$$\delta U_1 = P \cdot \delta s_1 = P \cdot r \cdot \delta\theta .$$

Ταυτόχρονα, παράγεται αρνητικό έργο τόσο από το βάρος Q της μικρής τροχαλίας όσο και από τη δύναμη στατικής τριβής F που αναπτύσσεται ανάμεσα στη μεγάλη τροχαλία και τον άξονά της.

Το έργο του βάρους Q είναι

$$\delta U_2 = -Q \cdot \delta s_2 ,$$

όπου $\delta s_2 = \frac{\delta s_1}{2} = \frac{r}{2} \delta\theta$ είναι η κατακόρυφη ανύψωση του βάρους Q .

Αντίστοιχα, το έργο τριβής είναι

$$\delta U_3 = -F \cdot \delta s_3 = -N \cdot \mu \cdot \delta s_3 ,$$

όπου $N = 2P$ είναι η κατακόρυφη αντίδραση που ασκείται στη μεγάλη τροχαλία από τον άξονά της, και $\delta s_3 = \frac{d}{2} \delta\theta$ η περιφεριακή μετακίνηση του εσωτερικού μανδύα της τροχαλίας που αντιστοιχεί στη γωνία $\delta\theta$.

Έτσι, η αρχή των δυνατών έργων, μετά τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, διατυπώνεται με την εξίσωση

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot r \cdot \delta\theta - Q \frac{r}{2} \delta\theta - 2P \cdot \mu \cdot \frac{d}{2} \delta\theta = 0 ,$$

από όπου προκύπτει

$$P(r - \mu \cdot d) = \frac{Q \cdot r}{2} \quad \text{και} \quad P = \frac{r}{2(r - \mu \cdot d)} Q .$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει

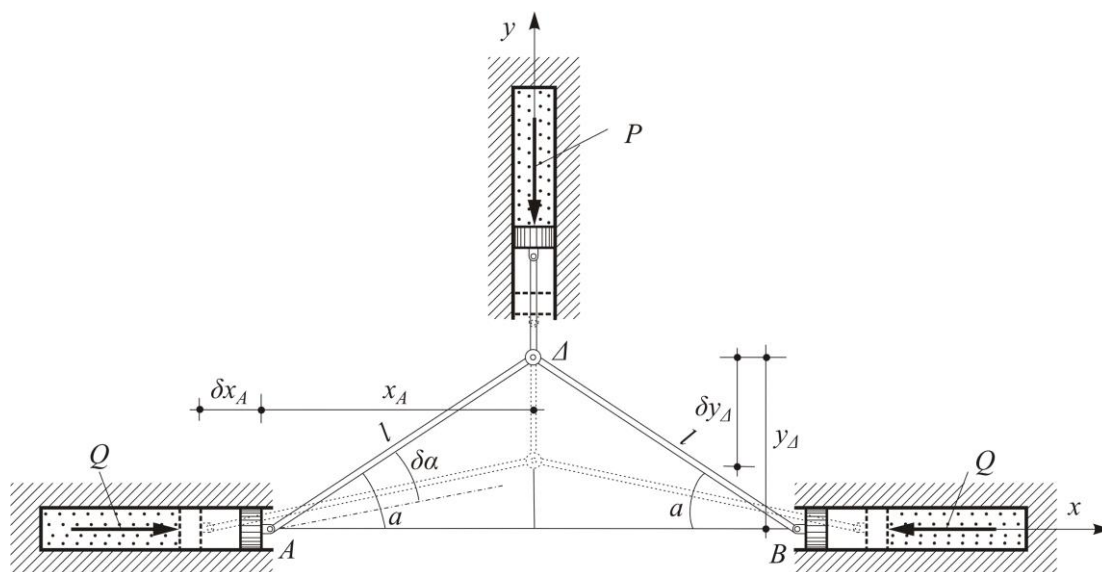
$$P = \frac{28}{2 \cdot (28 - 0,25 \cdot 8)} Q = 0,538 Q .$$

β) Η απόδοση a της μηχανής θα βρεθεί αν διαιρέσουμε το χρήσιμο έργο, που είναι η απόλυτη τιμή του έργου του βάρους Q , δια του έργου που καταναλίσκεται, και αυτό είναι το έργο της δύναμης P . Έτσι θα έχουμε

$$a = \frac{Q \frac{r}{2} \delta \theta}{P \cdot r \cdot \delta \theta} = \frac{Q}{2P} = \frac{Q}{0,538 \cdot Q} = \frac{0,5}{0,538} = 0,929 .$$

2 Στο μηχανισμό του σχήματος 10_9, να υπολογιστεί η δύναμη P που πρέπει να εφαρμοστεί στο έμβολο Γ , ώστε να προκαλέσει στα έμβολα A και B γνωστή δύναμη Q , και στη συνέχεια η απόδοσή του.

Ο συντελεστής τριβής για τις επιφάνειες που ολισθαίνουν είναι μ , ενώ στις αρθρώσεις είναι αμελητέος.



Σχ. 10_9

Λύση

Έστω δy_{Δ} η απειροστή κατακόρυφη μετατόπιση της άρθρωσης Δ που εμφανίζεται μετά την εφαρμογή της δύναμης P στο έμβολο Γ .

Επειδή κατά τη μετακίνηση αυτή μεταβάλλεται συμμετρικά η γωνία α των πλαγίων διωστήρων, θα πρέπει η υποχώρηση δy_{Δ} να υπολογιστεί σε σχέση με αυτή τη γωνία.

Για το σκοπό αυτό συσχετίζουμε τη θέση του σημείου Δ από το σταθερό άξονα x , ο οποίος ταυτίζεται με την AB , οπότε η απόσταση y_Δ , συναρτήσει της α , είναι

$$y_\Delta = l \cdot \eta\mu\alpha \ .$$

Διαφορίζοντας ως προς α , βρίσκουμε ότι η ζητούμενη μετατόπιση είναι

$$\delta y_\Delta = l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \delta\alpha \ .$$

Με το ίδιο σκεπτικό, αν x_A είναι η οριζόντια απόσταση του εμβόλου A από το σταθερό άξονα y , που ταυτίζεται με το διωστήρα $\Gamma\Delta$, θα είναι

$$x_A = l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{και} \quad \delta x_A = -l \cdot \eta\mu\alpha \cdot \delta\alpha \ .$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η απόσταση x_A μικραίνει όταν αυξάνεται η γωνία α και αντίστροφα, χωρίς να συσχετίζεται με το έργο της αντίστοιχης δύναμης.

Κατά τη διάρκεια των μετακινήσεων αυτών, το έργο που παράγει η δύναμη P εξουδετερώνεται από το αρνητικό έργο που παράγουν οι δυνάμεις Q , μαζί με τις δυνάμεις τριβής F .

Οι τελευταίες προκύπτουν αν η κατακόρυφη αντίδραση N του καθενός από τα έμβολα A και B , (η οποία λόγω συμμετρίας είναι ίση με $P/2$), πολλαπλασιαστεί με το συντελεστή τριβής μ .

Έτσι, η εξίσωση που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων, είναι

$$\sum \delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot \delta y_\Delta - 2Q \cdot \delta x_A - 2F \cdot \delta x_A = 0$$

$$\text{ή} \quad P \cdot \delta y_\Delta - 2Q \cdot \delta x_A - 2 \frac{P}{2} \cdot \mu \cdot \delta x_A = 0 \ , \quad \text{δηλαδή}$$

$$P(\delta y_\Delta - \mu \cdot \delta x_A) = 2Q \delta x_A \ .$$

Θέτοντας ήδη στην τελευταία σχέση τις τιμές των μετακινήσεων που βρήκαμε παραπάνω, παίρνουμε

$$P(l \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \delta\alpha - \mu \cdot l \cdot \eta\mu\alpha \cdot \delta\alpha) = 2Q \cdot l \cdot \eta\mu\alpha \cdot \delta\alpha \ , \quad \text{δηλαδή}$$

$$P(\sigma\upsilon\nu\alpha - \mu \cdot \eta\mu\alpha) = 2Q \cdot \eta\mu\alpha \ .$$

Διαιρώντας ήδη δια $\sigma\upsilon\nu\alpha$, προκύπτει

$$P(1 - \mu \cdot \epsilon\phi\alpha) = 2Q \cdot \epsilon\phi\alpha \ ,$$

και τελικά

$$P = \frac{2Q \cdot \epsilon\phi\alpha}{1 - \mu \cdot \epsilon\phi\alpha} \ .$$

Όσον αφορά στην απόδοση του μηχανισμού, αυτή θα βρεθεί αν υπολογίσουμε το λόγο του ωφέλιμου έργου των δυνάμεων Q , προς το καταναλισκόμενο της P . Δηλαδή θα είναι

$$a = \frac{2Q \cdot \delta x_A}{P \cdot \delta y_\Delta} ,$$

ή, μετά την αντικατάσταση της τιμής της P ,

$$\alpha = \frac{2Q \cdot l \cdot \eta\mu\alpha \cdot \delta\alpha}{\frac{2Q\epsilon\phi\alpha}{1 - \mu \cdot \epsilon\phi\alpha} \cdot l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \delta\alpha} = 1 - \mu \cdot \epsilon\phi\alpha .$$

Ευρετήριο

Ελληνικό

αδράνεια	11	δικτυωτές δοκοί	80
ακτίνα αδράνειας	69	δικτυωτοί φορείς	112
άλμα	87	δίσκος	19, 78
αμφιπροέχουσα	80	δοκός	18, 79
ανάλυση	15	δοκός Gerber	80
αντιδράσεις	82	δράση	17
αντίδραση	17	δυνάμεις στο χώρο	45
αξονική δύναμη	85	δυναμική	7
απαραμόρφωτος	7	δυναμοπολύγωνο	16, 25
απόδοση απλών μηχανών	160	δυναμοπολύγωνο ανοικτό	40
απόλυτα στερεά	13	δυνατά έργα	151, 153, 154
άρθρωση	21, 81	δυνατές μετατοπίσεις	151
αρθρωτή	80	δυσμενείς φορτίσεις	108
αρχή των δυνατών έργων	151, 155	εκτοπεριφέρεια	64
βαθμός ελευθερίας	152	ελεύθερη έδραση	20, 81
βαθμό στατικής αοριστίας	81	εξωτερικά στατικά ορισμένος φορέας	80
βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών q , Q & M	90	εξωτερικά φορτία	82
Βιβλιογραφία	171	επίπεδοι φορείς	78
γραμμικοί φορείς	78	επιφανειακοί φορείς	78
γραφική μέθοδος Cremona	119	έργο δύναμης	153
γραφικός προσδιορισμός των αντιδράσεων	31	εσωτερικά στατικά ορισμένος φορέας	80
γραφοστατική	25	ευθεία Culmann	34
γωνία τριβής	143	ζεύγος δυνάμεων	16
διάγραμμα θέσης	32	ημιέλλειψη	64
δικτύωμα	112	ημιπαραβολή	64
		ημιπεριφέρεια	64

θεώρημα του παράλληλου άξονα	70	μοχλοβραχίονας	16, 126
θεωρήματα των Πάππου – Guldin	59	ολισθαίνον διάνυσμα	13
ιδεώδη συστήματα	156	ολόσωμοι φορείς	80, 136
ισοστατικοί φορείς	21, 78	ομοιόμορφο φορτίο	20
ισοστατικός	80	ορθή δύναμη	86
καθολική φόρτιση	109	πάκτωση	21, 82
καμπτική ροπή	85	Πάππος	59
κατανεμημένα φορτία	20	παραβολή	64
κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M	92	παραβολικό	20
κέλυφος	19	παραβολικό χωρίο	64
κελυφωτοί φορείς	78	παραλληλόγραμμο δυνάμεων	15
κέντρα βάρους	54	παρβολή 'ν' βαθμού	64
κεντροβαρικός άξονας	54, 68	πλαισιωτούς	79
κεντροειδές	54	πλάκες	19, 78
κεντροειδές επιφανειών	54	πολικές ακτίνες	27
κινηματική	7	πολική ροπή αδράνειας	74
κινητική	8	πόλος	27
κινητότητα	113	πρόβολος	80
κλείουσα	31, 33	προσδιορισμός αντιδράσεων	30
κλειστό δυναμοπολύγωνο	40	ράβδος	18
κλειστό σχοινοπολύγωνο	41	ροπή αδράνειας κύκλου	69
κόμβοι	112	ροπή αδράνειας ορθογωνίου παραλ/μου	66
κυκλικός όνυχας	64	ροπή αδράνειας παραλληλογράμμου	67
κύλιση	20, 81	ροπή αδράνειας τριγώνου	68
μάζα	11	ροπή αδράνειας ως προς άξονα	65
μέθοδος ισορροπίας των κόμβων	114	ροπή δύναμης	14
μέθοδος των τομών	125	ροπή κάμψης	85
μηχανές	160	ροπή κύλισης	144
μονοπροέχουσα	80	σήμανση των φορτίων διατομής	86
μονοτρόχιο μηχανισμό	113	στατικά ορισμένη και σταθερή δικτυωτή κατασκευή	113

στατικά ορισμένος φορέας	80	τεταρτέλλειψη	64
στερεό	11	τεταρτοπεριφέρεια	64
στηρίξεις	20	τραπεζοειδές	20
συγκεντρωμένα φορτία	20	τριαρθρωτό τόξο	136
συμπαγές σώμα	11	τριαρθρωτοί φορείς	136
συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις	26	τριαρθρωτός φορέας	38
συνημίτονα κατευθύνσεως	47	τριβή	142
σύνθεση	15	τριβή κύλισης	143
σύνθεση συνεπιπέδων δυνάμεων	25	τριγωνικό	20
συνθήκες ισορροπίας	40	τροχιά	12
συνισταμένη	15	ύλη	11
συνιστώσες	15	υλικό σημείο	11
συντελεστή τριβής κύλισης	145	υπερστατικός φορέας	21, 81
συντρεχουσών	25	φορέας	7, 18
σχοινοπολύγωνα της ίδιας ομάδας	33	φορτία	20
σχοινοπολύγωνο	27	φορτία διατομής	85
σχοινοπολύγωνο ανοιχτό	41	φυγόκεντρη ροπή αδράνειας	76
σχοινοπολύγωνο δια τριών σημείων	34	φυσική σημασία των ροπών αδράνειας	77
σώμα	11	χρόνος	11
τέμνουσα	85	χωρικοί φορείς	78
		χώρος	11

Ξενόγλωσσο

Cremona	119
Gerber	80
Guldin	59
MKS	14
q, Q & M	90
Ritter	125
SI14	
Steiner	70
Stevin	15
Varignon	43

Βιβλιογραφία

1. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Σημειώσεις Υπολογισμών Κατασκευών Ι, Λάρισα, 1977.
2. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Αρχές και μέθοδοι στην Αντοχή των Υλικών, Λάρισα, 1988.
3. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Αρχές και Μέθοδοι στην Τεχνική Μηχανική, Λάρισα, 1990.
4. Ευστ. Κοκκινόπουλου, Στατική, Αθήνα, 1968.
5. Κωνστ. Χ. Γεωργικόπουλου, Μηχανική των Στερεών Σωμάτων, Αθήνα, 1968.
6. Κωνστ. Χ. Γεωργικόπουλου, Γραφοστατική, Αθήνα, 1967.
7. Γ. Μ. Νιτσιώτα, Εισαγωγή εις την Στατικήν, Θεσσαλονίκη, 1965.
8. Γιάννη Γαλανη - Παναγιώτη Ντόβα, Τεχνική Μηχανική, Αθήνα, 1983.
9. Γεωργίου Ρ. Γκρος - Λαζάρου Ε. Λαζαρίδη, Μηχανική, Αθήνα, 1989.
10. Π.Α. Βουθούνη, Τεχνική Μηχανική, Αθήνα, 1994.
11. Π.Α. Βουθούνη, Μηχανική του Απαραμόρφωτου στερεού - Στατική, Αθήνα, 1994.
12. Π.Α. Βουθούνη, Τεχνική Μηχανική Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, 2002.
13. Π.Α. Βουθούνη, Μηχανική παραμορφώσιμου στερεού Ι - Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, 2002.
14. S. Timoshenko, D.H. Young, Μηχανική, Αθήνα, 1964.
15. Gere & Timoshenko, Mechanics of Materials, Stanford University, Monterey, California.
16. Raymond F. Neathery, Statics and Applied Strength of Materials, Canada, 1985.