



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**Πρόγραμμα Σπουδών Πολιτικών Μηχανικών Τ.Ε.**

**Εγχειρίδιο στο μάθημα**

## **Υπολογισμοί Κατασκευών**

**Θεωρία - Ασκήσεις**

**Επιμέλεια Θεωρίας**

**Φιλόθεος Λόκκας**

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Ομότιμος Καθηγητής Παν. Θεσ.

**Επιμέλεια Ασκήσεων**

**Νικόλαος Αλαμανής**

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Επίκουρος Καθηγητής Παν. Θεσ.

Λάρισα, Μάρτιος 2021

## **Αφιερώνεται**

Σε όλους εκείνους που συνειδητά μοχθούν  
για ένα καλύτερο αύριο

# Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος .....	7
Εισαγωγή .....	8
<b>Κεφάλαιο 1°</b> .....	10
Βασικές αρχές και έννοιες των Υπολογισμών Κατασκευών .....	11
1.1 - Η δύναμη.....	13
1.2 - Τύποι συστημάτων δυνάμεων .....	15
1.3 - Ροπή δύναμης ως προς σημείο και άξονα .....	15
1.4 - Συνισταμένη και συνιστώσες .....	16
1.5 - Σύνθεση και ανάλυση δύναμης .....	16
1.6 - Ζεύγος δυνάμεων .....	16
1.7 - Δράση και αντίδραση.....	17
1.8 - Φορέας, ελεύθερος και πλήρης .....	18
α. Ράβδος.....	18
β. Δοκός .....	18
γ. Δίσκος - δ. Πλάκα.....	19
ε. Κέλυφος.....	19
1.9 - Εξωτερικές δυνάμεις .....	20
α. Φορτία.....	20
β. Αντιδράσεις .....	20
1.10 - Στηρίξεις .....	20
1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση. ....	20
2. Άρθρωση.....	21
3. Πάκτωση .....	21
1.11 - Ισοστατικοί και υπερστατικοί φορείς.....	21
<b>Κεφάλαιο 2°</b> .....	24
Ισοστατικοί φορείς .....	25
1. Χωρικοί .....	25

2. Επιφανειακοί .....	25
3. Γραμμικοί .....	26
2.1 - Η δοκός ως φορέας .....	26
2.2 - Οι στηρίξεις .....	28
1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση. ....	28
2. Άρθρωση.....	28
3. Πάκτωση .....	29
2.3 - Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις.....	29
2.4 - Τα φορτία διατομής .....	32
2.5 - Σήμανση των φορτίων διατομής .....	34
Παράδειγμα.....	35
2.6 - Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών $q$ , $Q$ & $M$ .....	37
2.7 - Κατασκευή των διαγραμμάτων $Q$ και $M$ .....	39
Παραδείγματα.....	43
2.8 - Η δοκός Gerber .....	55
Παράδειγμα.....	56
2.9 - Γενικές παρατηρήσεις.....	60
2.10 - Δυσμενείς φορτίσεις.....	60
<b>Κεφάλαιο 3°</b> .....	<b>61</b>
Υπερστατικοί φορείς .....	65
3.1 - Η μέθοδος των Παραμορφώσεων .....	66
Παράδειγμα.....	70
3.2 - Η μέθοδος Cross .....	73
Παραδείγματα.....	75
3.3 - Η εξίσωση των τριών ροπών (Clapeyron).....	84
Παραδείγματα.....	85
3.4 - Η μέθοδος των δυνάμεων .....	89
3.4.1 Βασικές έννοιες - ορισμοί .....	89
3.4.2 Έργο εξωτερικών δυνάμεων .....	89
3.4.3 Έργο εσωτερικών δυνάμεων (Έργο παραμόρφωσης).....	90
3.4.4 Δυνατή μετατόπιση και Δυνατό έργο.....	91

3.4.5 Αρχή των Δυνατών Έργων .....	91
3.4.6 Η μέθοδος του μοναδιαίου φορτίου .....	92
3.4.7 Επίλυση υπερστατικού φορέα .....	92
Παράδειγμα.....	94
3.4.8 Παράδειγμα επίλυσης με οργανωμένα βήματα .....	95
<b>Κεφάλαιο 4°</b> .....	<b>96</b>
Επίπεδοι δικτυωτοί φορείς .....	101
4.1 - Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων .....	103
Παράδειγμα.....	104
4.2 - Η γραφική μέθοδος του διαγράμματος Cremona .....	108
Παράδειγμα.....	109
4.3 - Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter) .....	114
Παραδείγματα.....	116
<b>Κεφάλαιο 5°</b> .....	<b>119</b>
Τριαρθρωτοί φορείς .....	125
5.1 - Υπολογισμός των αντιδράσεων .....	125
5.2 - Υπολογισμός της έντασης.....	126
Παράδειγμα.....	127
<b>Κεφάλαιο 6°</b> .....	<b>123</b>
Γραμμές Επιρροής .....	129
6.1 - Γραμμές επιρροής αντιδράσεων, τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης δοκού .....	129
Παράδειγμα.....	133
6.2 - Κινητά φορτία .....	135
6.3 - Περίπτωση συρμού από δυο φορτία .....	136
Παράδειγμα.....	137
<b>Κεφάλαιο 7°</b> .....	<b>133</b>
Αρχή των δυνατών έργων .....	140
7.1 - Δυνατές μετατοπίσεις .....	140

7.2 - Δυνατά έργα .....	142
7.3 - Η αρχή των δυνατών έργων .....	144
Παραδείγματα.....	146
7.4 - Απόδοση απλών μηχανών .....	150
Παραδείγματα.....	152
Βιβλιογραφία .....	156
Ευρετήριο .....	158

## Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό προορίζεται να εξυπηρετήσει τους Σπουδαστές που παρακολουθούν με τηλεδιάσκεψη το μάθημα 'Υπολογισμοί Κατασκευών', το οποίο ανήκει στα μαθήματα 4<sup>ου</sup> του εξαμήνου του προγράμματος Σπουδών Πολιτικών Μηχανικών Τ.Ε. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Χορηγείται δωρεάν στους Σπουδαστές που το παρακολουθούν, σαν συμπληρωματικό βοήθημα, πέραν του αντιστοίχου συγγράμματος που τους απονέμεται μέσω των διαδικασιών του Ευδόξου.

Καλύπτει το προβλεπόμενο περιεχόμενο διδακτέας ύλης του μαθήματος και οπωσδήποτε τις ενότητες που θα αναπτυχθούν από τον διδάσκοντα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Καταβλήθηκε ξεχωριστή προσπάθεια ώστε να καλύψει τη διδακτέα ύλη που εγκρίθηκε από το Πρόγραμμα Σπουδών Πολιτικών Μηχανικών Τ.Ε., χωρίς να επεκτείνεται σε θέματα θεωρητικού ή εξεζητημένου χαρακτήρα.

Για την καλύτερη κατανόηση του θεωρητικού μέρους, δόθηκαν εκλεκτικά αντίστοιχα παραδείγματα. Γενικότερη όμως επιδίωξη ήταν, τόσο η ανάπτυξη της θεωρίας όσο και η παράθεση των αντιστοίχων σχημάτων και παραδειγμάτων να γίνουν με **απλότητα** και **σαφήνεια**, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη αφομοίωση του μαθήματος από τους σπουδαστές.

Με την ελπίδα ότι οι παραπάνω στόχοι μας έχουν κατά ένα μεγάλο μέρος επιτευχθεί, παραδίδουμε το βιβλίο αυτό στους σπουδαστές του παραπάνω Προγράμματος Σπουδών, δεχόμενοι κάθε καλόπιστη κριτική που θα μπορούσε να τη χρησιμοποιηθεί μελλοντικά.

Λάρισα, Μάρτιος 2021

Οι Συγγραφείς

Φιλόθεος Λόκκας

Νικόλαος Αλαμανής

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Ομότιμος Καθηγητής Παν. Θεσ.

Επίκουρος Καθηγητής Παν. Θεσ.

## Εισαγωγή

**Μηχανική** είναι η εφαρμοσμένη φυσική επιστήμη που ασχολείται με σώματα τα οποία βρίσκονται σε ηρεμία ή κίνηση κάτω από την επίδραση δυνάμεων.

Ανάλογα με τη φυσική κατάσταση των σωμάτων που εξετάζει, διακρίνεται στη:

- α) Μηχανική των στερεών
- β) Μηχανική των υγρών και
- γ) Μηχανική των αερίων.

Η Μηχανική των στερεών μελετά την ισορροπία, την εντατική κατάσταση και την κίνηση των **φορέων**, δηλαδή των σωμάτων που φορτίζονται. Ειδικότερα, ανάλογα με το αντικείμενο της μελέτης της, διακρίνουμε:

**Α. Τη Στατική** που εξετάζει γενικά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένας φορέας **στέκεται**, δηλαδή ισορροπεί. Σαν προέκταση της Στατικής θεωρείται η **Αντοχή των Υλικών**, που μελετά ειδικότερα τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους φορείς που καταπονούνται, πάντα σε συνδυασμό με τις παραμορφώσεις που προκαλούνται. Θεωρεί τα σώματα όπως πραγματικά είναι στη φυσική τους κατάσταση, δηλαδή ελαστικά και όχι απαραμόρφωτα όπως στη Στατική, καθορίζοντας ανώτατα επιτρεπόμενα όρια φορτίων - παραμορφώσεων.

Τα συμπεράσματα της ευρύτερης στατικής μελέτης εφαρμόζονται γενικά στις κατασκευές των τεχνικών έργων, όπου προσδιορίζονται οι διαστάσεις των διαφόρων μερών της μετά από υπολογισμό των δυνάμεων που τα επιβαρύνουν, έτσι ώστε οι κατασκευές να είναι ασφαλείς, οικονομικές και χωρίς απαράδεκτες παραμορφώσεις.

**Β. Τη Δυναμική** που μελετά την κίνηση των σωμάτων καθώς και τις δυνάμεις που συσχετίζονται με τα κινούμενα σώματα. Έτσι διαιρούμε τη Δυναμική:

1) Στην **Κινηματική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος χωρίς να εξετάζει τις δυνάμεις που την προκαλούν, οπότε οι σχέσεις που προκύπτουν είναι **χωρο - χρονικές**. Όταν π.χ. βλέπουμε έναν τροχό να κυλιέται σε ευθύγραμμη τροχιά με σταθερή ταχύτητα, ο καθορισμός του σχήματος της τροχιάς που διαγράφει όπως κινείται ένα σημείο της στεφάνης του, καθώς και της θέσης του σημείου αυτού σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, είναι προβλήματα της Κινηματικής.



2) Στην **Κινητική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος λαμβάνοντας υπόψη τις δυνάμεις που την προκαλούν. Η εύρεση π.χ. του σταθερού ζεύγους που πρέπει να ασκηθεί στον άξονα ενός ρότορα, έτσι ώστε σε μια δοσμένη χρονική στιγμή να έχει μια συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, είναι πρόβλημα της Κινητικής.

Ενώ η συμβολή της Κλασσικής περιόδου στη Στατική είναι μεγάλη, η Δυναμική εδραιώθηκε σαν επιστήμη στο μεσαίωνα.

Το πεδίο εφαρμογής μεθόδων και διαδικασιών που αναπτύσσεται στους **Υπολογισμούς Κατασκευών**, καλύπτει ένα μεγάλο μέρος της Στατικής, αν και δεν περιορίζεται μόνο σε στατικά φορτία, αλλά εξετάζει και την επιρροή των κινουμένων φορτίων σε έναν φορέα, είτε μεμονωμένων είτε ομαδικών, που παρουσιάζουν τη μορφή συρμών.

Μεγάλη υπήρξε η συμβολή των:

1. **Galileo Galilei** (1564 - 1642), ο οποίος διατύπωσε μια θεωρία στις δοκούς, η οποία αν και ανακριβής, προσδιόριζε τη σχέση μεταξύ φορτίου και διατομής σε δοκό ίσης αντοχής.
2. **Sir Isaac Newton** (1642 - 1727) ο οποίος, ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών, διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης των σωμάτων και τον περισπούδαστο νόμο της βαρύτητας.
3. **Jean Baptiste le Rond d' AAlembert** (1717 - 1783) ο οποίος πρώτος διατύπωσε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας για το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης, ενώ μετά το 1768 εισήγαγε τη χρήση διαφορικών εξισώσεων.
4. **Charles Auguste Coulomb** (1736 - 1806) και **Louis Marie Henri Navier** (1785 - 1836) οι οποίοι συνέλεξαν τις τότε διασκορπισμένες γνώσεις, τις ταξινόμησαν με κρίση, τις ανέπτυξαν περαιτέρω μεθοδικά και έδωσαν στη Στατική μια κατεύθυνση προς το μέλλον.
5. **Joseph-Louis Lagrange** (1736 - 1813) ο οποίος έκανε σημαντικές μελέτες στα πεδία της μαθηματικής ανάλυσης, της θεωρίας αριθμών και της κλασσικής και ουράνιας μηχανικής.
6. **Karl Culmann** (1821 - 1881) ο οποίος ανέπτυξε γραφικές μεθόδους της Στατικής καθώς επίσης και τη θεωρία των δικτυωμάτων με την παραδοχή των αρθρωτών κόμβων.
7. **Luigi Cremona** (1830 - 1903) ο οποίος δημιούργησε τα διαγράμματα με τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν γραφικά οι δυνάμεις των ράβδων στα δικτυώματα.

8. **Otto Mohr** (1835 - 1918) ο οποίος εφάρμοσε πρώτος την αρχή των δυναμικών μετακινήσεων, διατυπώνοντας μια αναλογία για τον υπολογισμό της ελαστικής γραμμής ράβδου.
9. **Wilhelm Ritter** (1847 - 1906) ο οποίος ανέπτυξε περαιτέρω την εφαρμογή της Στατικής με γραφικές μεθόδους, ιδιαίτερα πάνω στα δικτυώματα, με τις περίφημες τομές.
10. **Hardy Cross** (1885 - 1959) ο οποίος με την τότε πρωτοποριακή του μέθοδο (1930), σε συνδυασμό και με τη συμβολή του **Gaspar Kani** (1949) κατόρθωσε να επιλύσει στατικά αόριστους φορείς με τη βοήθεια της διαδοχικής προσέγγισης, διευκολύνοντας έτσι τον υπολογισμό.

Σε σχέση με τη Στατική, η Δυναμική σαν επιστήμη καθυστέρησε ν' αναπτυχθεί. Η καθυστέρηση αυτή οφείλεται βασικά στη δυσκολία διεξαγωγής των αναγκαίων πειραμάτων.

### Βασικές αρχές και έννοιες των Υπολογισμών Κατασκευών

Η Μηχανική σαν επιστήμη στηρίζεται σε ορισμένες βασικές αρχές που θέτουμε εκ των προτέρων από τα δεδομένα της εμπειρίας και του πειράματος, πάνω στις οποίες, με μαθηματικές μεθόδους, θεμελιώνουμε στη συνέχεια το οικοδόμημά της.

Οι αρχές αυτές απορρέουν από τις έννοιες του χρόνου, της μάζας και της δύναμης που θα περιγράψουμε πιο κάτω και αποκτούμε από την εμπειρία, αλλά και από την πειραματική μελέτη απλών κινήσεων. Είναι δηλαδή προτάσεις ή νόμοι, η ισχύς των οποίων δεν αποδεικνύεται αλλά διαπιστώνεται πειραματικά. Οι αρχές αυτές είναι τρεις:

1. Η αρχή της **αδράνειας**
2. Η αρχή της **ανεξαρτησίας του αποτελέσματος δυνάμεων** (αλλιώς αρχή της **επαλληλίας**)
3. Η αρχή της **ισότητας δράσης και αντίδρασης**.

Από αυτές οι δύο πρώτες αρκούν για να οικοδομηθεί η Μηχανική του υλικού σημείου. Η αρχή της ισότητας δράσης - αντίδρασης μας επιτρέπει να επεκταθούμε στη Μηχανική των υλικών Συστημάτων.

Η αρχή της αδράνειας διατυπώθηκε στην αρχαιότητα από τον Αριστοτέλη, αργότερα από τον Da Vinci, τον Γαλιλαίο και με την οριστική της μορφή από το Νεύτωνα ως εξής:

«Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησής του, εφ' όσον δεν ενεργήσει σ' αυτό καμία εξωτερική δύναμη».

Η αρχή αυτή, στην οποία ο Νεύτων με την έννοια του σώματος θεωρεί το υλικό σημείο της σύγχρονης Μηχανικής, μπορεί να πάρει διαδοχικά τις παρακάτω διατυπώσεις:

- ✓ Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονωμένο (δεν δρα καμία δύναμη), η ταχύτητά του ή είναι μηδέν, ή διατηρείται σταθερή κατά μέτρο διεύθυνση και φορά
- ✓ Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονωμένο, η επιτάχυνσή του είναι μηδέν

- ✓ Αν υλικό σημείο έχει επιτάχυνση, θα βρίσκεται αναγκαστικά στην περιοχή άλλων υλικών σημείων ή σωμάτων που δρουν πάνω σ' αυτό.

Άρα όταν ένα σώμα Α, επιδρώντας σε σώμα Β έχει σαν αποτέλεσμα να το επιταχύνει, θα λέμε στη Μηχανική ότι η δράση του Α πάνω στο Β είναι **δύναμη** που **προέρχεται** από το Α και **εφαρμόζεται** στο Β.

Ορίζουμε επομένως τη δύναμη σαν **αιτία της επιτάχυνσης**.

Όμως **τίποτα δε γνωρίζουμε πάνω στο μηχανισμό** κατά τον οποίο πραγματοποιείται η δράση του Α πάνω στην κίνηση του Β. Έτσι, ενώ λέμε π.χ. ότι ο ήλιος έλκει τη γη, τίποτα δε γνωρίζουμε για το μηχανισμό αυτής της έλξης.

Συμπεραίνοντας καταλήγουμε ότι η φύση της δύναμης μας είναι **άγνωστη** και κάθε έρευνα στον τομέα αυτό ανήκει στη Μεταφυσική.

Την έννοια της δύναμης αποκτούμε μόνο με τις αισθήσεις. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για να αποκτήσει ένα υλικό σημείο επιτάχυνση, θα πρέπει να δράσει πάνω του κάποια αιτία. Την αιτία αυτή ονομάζουμε δύναμη.

Προτού όμως εισέλθουμε στη μελέτη της Μηχανικής είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένες έννοιες της γενικής Φυσικής.

**Χρόνος** είναι η ποσότητα μέτρησης της διάρκειας ή της διαδοχής δύο γεγονότων. Στη Νευτώνεια Μηχανική θεωρείται ποσότητα απόλυτη (θετική).

**Χώρος** ή **Διάστημα** είναι ένα κενό που εκτείνεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Ο καθορισμός ενός σημείου στο διάστημα είναι σχετικός και γίνεται με γραμμικές και γωνιακές μετρήσεις ως προς ένα σύστημα αναφοράς το οποίο θεωρείται ακίνητο.

**Ύλη** είναι η ουσία που κατέχει κάποιο χώρο στο διάστημα.

**Αδράνεια** είναι η ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται στην αλλαγή της κινητικής της κατάστασης.

**Μάζα** είναι η ποσοτική μέτρηση της αδράνειας της ύλης.

**Σώμα** είναι η ύλη που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια.

**Στερεό** ή **συμπαγές σώμα** είναι ένα ιδεατό σώμα που δεν υφίσταται σχετικές παραμορφώσεις μεταξύ των μερών του. Επομένως διατηρεί το σχήμα του σταθερό.

**Υλικό σημείο** ονομάζεται σώμα, όχι κατ' ανάγκην μικρό, το οποίο όμως κατά την κίνησή του θεωρείται σαν μονάδα ύλης.

Είναι αυτονόητο ότι το υλικό σημείο είναι καθαρά θεωρητική έννοια η οποία όμως εξυπηρετεί πολύ στη λύση πολλών προβλημάτων. Έτσι στην

ουράνια Μηχανική, όπου οι αποστάσεις που εμφανίζονται είναι τεράστιες, η γη θεωρείται σαν υλικό σημείο με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο της.

**Τροχιά** είναι το σύνολο των διαδοχικών θέσεων που καταλαμβάνει ένα υλικό σημείο κατά την κίνησή του.

Στο βιβλίο αυτό θα μας απασχολήσει σχεδόν αποκλειστικά η **Στατική**, σαν το μέρος εκείνο της Μηχανικής που ασχολείται με την **ισορροπία των σωμάτων** και έχει ως αντικείμενο την αναζήτηση και διατύπωση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες τα σώματα της φύσης, διατηρούν την ισορροπία τους κάτω από μια φόρτιση με οποιεσδήποτε εξωτερικές δυνάμεις.

## 1.1 – Η δύναμη

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η δύναμη, μας είναι γνωστή μόνο σαν εξωτερική αιτία που πρέπει να επιδράσει σε ένα υλικό σημείο για να προκαλέσει πάνω σ' αυτό επιτάχυνση.

Μια τέτοια αιτία μπορεί να θεωρηθεί ως η απαρχή των περισσότερων αλλά και σημαντικότερων μηχανικών φαινομένων πάνω στον πλανήτη μας.

Τέτοια φαινόμενα είναι οι μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις, η παγκόσμια έλξη, η δύναμη του ανέμου, η ατμοσφαιρική πίεση ή ειδικότερα οι ελκτικές δυνάμεις που οφείλονται στον ήλιο λόγω της μεγάλης του μάζας αλλά και στη σελήνη λόγω της μικρής της απόστασης από τη γη, προκαλώντας τις γνωστές παλίρροιες της θάλασσας και της ατμόσφαιρας.

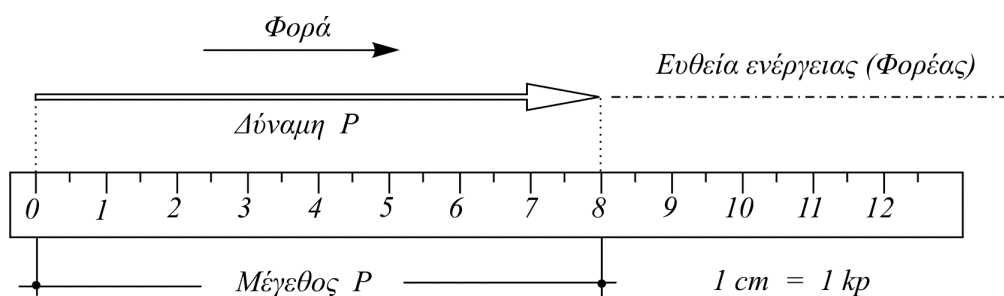
Σαν μονάδα μέτρησης των δυνάμεων έχει οριστεί στο **τεχνικό σύστημα** το κιλοπόν, που συμβολίζεται με  $\text{kp}$  και είναι το βάρος ενός λίτρου νερού, θερμοκρασίας  $4^{\circ}\text{C}$ , μέσου γεωγραφικού πλάτους και μηδενικού υψομέτρου.

Στην πράξη χρησιμοποιούμε επίσης και το πολλαπλάσιο της μονάδας αυτής, το μεγαπόν ή τόνο, ( $1\text{Mp} = 1000 \text{kp} = 1 \text{t}$ ).

Για τον ακριβή καθορισμό μιας δύναμης θα πρέπει να γνωρίζουμε:

1. Το μέτρο της, π.χ.  $8 \text{kp}$
2. Την ευθεία πάνω στην οποία ενεργεί, δηλαδή το φορέα της
3. Τη φορά της
4. Το σημείο εφαρμογής της.

Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τη δύναμη γραφικά με ένα διάνυσμα, όπου:



### Χαρακτηριστικά δύναμης

το μήκος του διανύσματος, παριστάνει, με κάποια κλίμακα, π.χ.  $1 \text{ cm} = 1 \text{ kp}$  το μέτρο της δύναμης.

το βέλος του ανύσματος δείχνει τη φορά της, ενώ

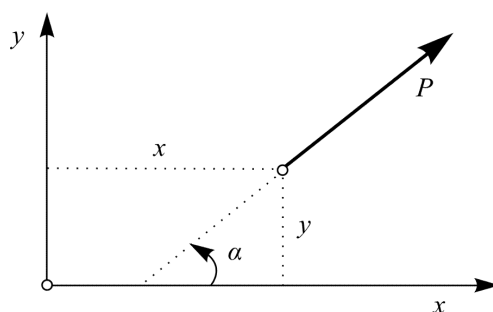
η αρχή ή το τέλος της δύναμης είναι το σημείο εφαρμογής της.

Για να καθοριστεί μια δύναμη στο επίπεδο τρία στοιχεία είναι απαραίτητα:

α) Το μέτρο της

β) Η κατεύθυνση, που ορίζεται από τη γωνία  $\alpha$  που προκύπτει όταν ο θετικός άξονας  $x$  στραφεί αριστερόστροφα, ώσπου να συμπίσει με τη δύναμη και

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου εφαρμογής της.



### Καθορισμός δύναμης

Στη Μηχανική των Υλικών Συστημάτων τα σώματα θεωρούνται **απόλυτα στερεά**, δηλαδή επιτρέπεται να **αγνοηθούν οι εσωτερικές** τους δυνάμεις. Άρα λοιπόν κάθε δύναμη που ενεργεί σε απόλυτα στερεό σώμα, επιτρέπεται να νοηθεί ότι ασκείται οπουδήποτε πάνω στο φορέα της, και ως εκ τούτου να θεωρηθεί ως **ολισθαίνον διάνυσμα**.

Στα σχήματα των επομένων κεφαλαίων δεν σχεδιάζεται πάντοτε το στερεό σώμα πάνω στο οποίο δρουν οι δυνάμεις, επειδή είναι αυτονόητο ότι όπου υπάρχουν και σχεδιάζονται δυνάμεις υπάρχει πάντοτε ένα σώμα πάνω στο οποίο ενεργούν.

## 1.2 – Τύποι συστημάτων δυνάμεων

Για τις μελέτες και κατασκευές διαφόρων τεχνικών έργων χρησιμοποιείται από παλιά το τεχνικό σύστημα μέτρησης.

Όμως η διαστημική πρόοδος είχε σαν αποτέλεσμα την υιοθέτηση ενός ενιαίου συστήματος μέτρησης, αρχικά σ' ολόκληρο τον πλανήτη και αργότερα στο σύμπαν, του λεγόμενου φυσικού συστήματος MKS, με την ονομασία SI (System Internationale).

Το σύστημα αυτό χρησιμοποιεί σα θεμελιώδη μεγέθη

το μέτρο (m)

το χιλιόγραμμα μάζης (kg) και

το δευτερόλεπτο (sec)

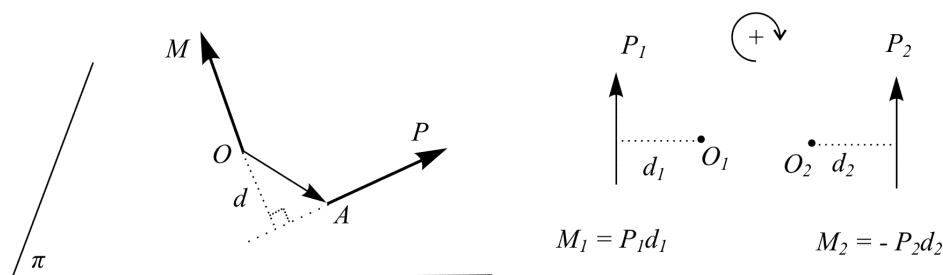
Μονάδα δύναμης στο σύστημα SI είναι το **Newton (N)** το οποίο δεν είναι θεμελιώδης, αλλά παράγωγη μονάδα με ισοδυναμία:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2} = 0,10197 \text{ kp} \approx 0,1 \text{ kp}.$$

Σκοπός του παρόντος συγγράμματος είναι να μυήσει το σπουδαστή στον τρόπο λειτουργίας των ισοστατικών και υπερστατικών φορέων, των οποίων ο υπολογισμός και η κατασκευή αποτελούν αντικείμενο της επιστήμης του.

## 1.3 – Ροπή δύναμης ως προς σημείο και άξονα

Θεωρούμε τη δύναμη  $P$  η οποία κείται στο επίπεδο του σχήματος και σημείο  $O$  εκτός αυτής.



### Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Θα ονομάζουμε ροπή  $M$  της δύναμης  $P$  ως προς το σημείο  $O$  το διάνυσμα που ορίζεται σαν γινόμενο της δύναμης επί την επιβατική ακτίνα που ενώνει τυχόν σημείο του φορέα της (ή την αρχή  $A$ ) με το  $O$ . Δηλαδή:

$$M = OA \cdot P$$

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, το διάνυσμα της ροπής είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η  $P$  και το  $O$ , έχοντας μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης  $P$  επί την απόσταση  $d$  του σημείου από το φορέα της  $P$ .

Δηλαδή είναι  $M = P \cdot d$ .

Η ροπή αυτή θεωρείται θετική όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα ως προς το  $O$  (κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου) και αρνητική κατά την αντίθετη φορά.

Η απόσταση  $d$  ονομάζεται **μοχλοβραχίονας** της δύναμης.

Από τον ορισμό της, προκύπτει ότι η ροπή δύναμης ως προς σημείο:

μηδενίζεται όταν το  $O$  βρίσκεται πάνω στο φορέα της δύναμης

δεν μεταβάλλεται όταν η δύναμη ολισθήσει πάνω στο φορέα της, ή το σημείο  $O$  μετακινηθεί σ' οποιαδήποτε θέση παράλληλα προς το φορέα της δύναμης.

## 1.4 – Συνισταμένη και συνιστώσες

Μια δύναμη που προκαλεί σε ένα σώμα τα **ίδια μηχανικά αποτελέσματα** μ' εκείνα που προκαλούν συγχρόνως δύο ή περισσότερες δυνάμεις που δρουν στο ίδιο σώμα, ονομάζεται **συνισταμένη** των δυνάμεων αυτών.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **συνιστώσες**, τις δυνάμεις, των οποίων η δράση σε ένα σώμα έχει τα ίδια αποτελέσματα με τη συνισταμένη τους.

## 1.5 – Σύνθεση και ανάλυση δύναμης

Ονομάζουμε **σύνθεση** δύο ή περισσότερων δυνάμεων τον προσδιορισμό της συνισταμένης τους. Ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να γίνει με γραφικές ή αναλυτικές μεθόδους.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **ανάλυση** μιας δύναμης τον προσδιορισμό των συνιστωσών της. Η ανάλυση μιας δύναμης μπορεί να γίνει σε δύο, τρεις ή περισσότερες συνιστώσες κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αρκεί να είναι γνωστοί οι φορείς των συνιστωσών.

Σημειώνεται ότι στους Υπολογισμούς Κατασκευών, η διαδικασία που ακολουθείται συνήθως για την ανάλυση μιας δύναμης είναι η χρησιμοποίηση αναλυτικών σχέσεων.

## 1.6 – Ζεύγος δυνάμεων

Θα λέμε ότι δύο δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων** ή απλά **ζεύγος**, όταν είναι παράλληλες, έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετες φορές.

Η απόσταση  $d$  που ορίζεται μεταξύ των παραλλήλων αυτών δυνάμεων ονομάζεται **μοχλοβραχίονας**.



Αν και η συνισταμένη ενός ζεύγους δυνάμεων είναι μηδέν, οι δυνάμεις δεν ισορροπούν, αλλά δημιουργούν ροπή όμοια μ' εκείνη που προκαλεί μια δύναμη ως προς σημείο.

Η ροπή αυτή του ζεύγους ισούται με το γινόμενο της μιας των ίσων δυνάμεων επί το μοχλοβραχίονα, και είναι:

- θετική όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν δεξιόστροφα,
- αρνητική όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν αριστερόστροφα.

Δύο ζεύγη δυνάμεων ονομάζονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν

α) βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή σε παράλληλα επίπεδα

β) έχουν τον ίδιο προσανατολισμό (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα)

γ) έχουν την ίδια ροπή, ή όπως θα λέγαμε με άλλα λόγια, τα εμβαδά των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις παράλληλες δυνάμεις του κάθε ζεύγους είναι ισοδύναμα.

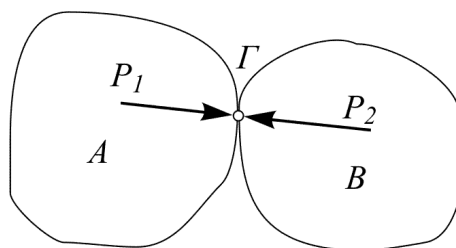
Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ελεύθερο διάνυσμα που μπορεί να εφαρμοστεί κάθετα σ' οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεών του. Γι αυτό και είναι μέγεθος **ανεξάρτητο της θέσης** του σημείου προς το οποίο λαμβάνονται υπόψη οι ροπές άλλων ενδεχομένως δυνάμεων.

Περισσότερα ζεύγη δυνάμεων συντίθενται σε ένα συνιστάμενο ζεύγος, του οποίου η ροπή ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών τους.

Η ροπή εκφράζεται σε  $\text{tm}$ ,  $\text{kpm}$ ,  $\text{krcm}$ ,  $\text{Nm}$  κλπ.

## 1.7 – Δράση και αντίδραση

Θεωρούμε τα σώματα Α και Β τα οποία εφάπτονται στο σημείο Γ και ηρεμούν.



*Διαδραστικότητα σωμάτων*

Αν  $P_1$  είναι η δύναμη την οποία ασκεί το σώμα Α πάνω στο Β, τότε τα δύο σώματα θα παραμένουν σε ισορροπία μόνον όταν και το σώμα Β ασκεί στο Α μια ίση και αντίθετη δύναμη  $P_2$ , η οποία έχει κοινό φορέα με την  $P_1$ .

Η δύναμη  $P_1$  ονομάζεται δράση και η  $P_2$  αντίδραση. Επομένως όπου υπάρχει δράση, εκεί εμφανίζεται ταυτόχρονα και μια αντίδραση.

Τονίζεται ότι η δράση και η αντίδραση δεν ανήκουν στο ίδιο σώμα. Η μια εξασκείται στο ένα σώμα και η άλλη στο άλλο.

## 1.8 – Φορέας, ελεύθερος και πλήρης

Η έννοια του φορέα είναι συνυφασμένη με κάθε **κατασκευή** που προορίζεται να αναλάβει με ασφάλεια εξωτερικές δυνάμεις, με σκοπό να τις μεταφέρει με την ίδια ασφάλεια στο σώμα που τη στηρίζει. Έτσι ο σκελετός μιας πολυκατοικίας π.χ. από οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το **φορέα** της.

Κάθε πλήρης φορέας αποτελείται από τον ελεύθερο φορέα και τη στήριξή του.

**Ελεύθερος** φορέας είναι το τμήμα εκείνο της κατασκευής που δέχεται τα εξωτερικά φορτία, ενώ

**Στήριξη** είναι μόνο το τμήμα εκείνο που μεταβιβάζει τις δυνάμεις από τον ελεύθερο φορέα στο έδαφος.

Έτσι, στην περίπτωση π.χ. των πολυκατοικιών, η μεταβίβαση των δυνάμεων από τον ελεύθερο φορέα στο έδαφος, γίνεται μέσω των πέλδων θεμελίωσης των υποστυλωμάτων.

Μορφολογικά, τα κατασκευαστικά στοιχεία κάθε ελεύθερου φορέα διακρίνονται σε πέντε κατηγορίες:

### α. Ράβδος

Στη ράβδο η διάσταση που κυριαρχεί είναι μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά της, ενώ οι άλλες διαστάσεις της διατομής που είναι κάθετες στον άξονα είναι **μικρές** σε σχέση με την αξονική.



*Τυπική ράβδος*

Έτσι η ράβδος αναλαμβάνει μόνο εφελκυστικές ή θλιπτικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονά της.

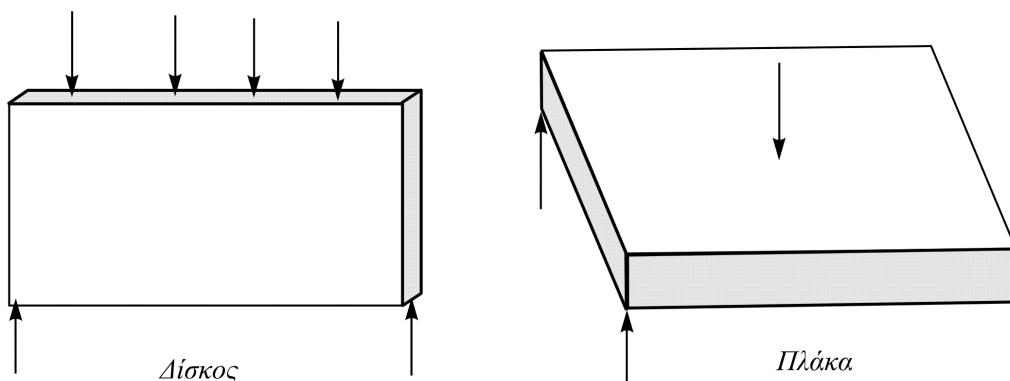
### β. Δοκός

Σε αντίθεση με την απλή ράβδο, η δοκός ή ράβδος σύνθετης αντοχής όπως αλλιώς λέγεται, αναλαμβάνει **και** δυνάμεις που είναι κάθετες στον άξονά της. Συνεπώς εντείνεται όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, στρεπτικά κλπ. δηλαδή **σύνθετα**.



### γ. Δίσκος – δ. Πλάκα

Ο δίσκος και η πλάκα, σαν κατασκευαστικά στοιχεία ελεύθερων φορέων, είναι γεωμετρικά όμοια, επειδή έχουν μεγάλη επίπεδη επιφάνεια με μικρό σχετικά πάχος.



#### Σχηματική φόρτιση επίπεδων φορέων

Επομένως οι διαστάσεις που κυριαρχούν στους δίσκους και στις πλάκες είναι δύο αντί της μιας των ραβδωτών φορέων, γι' αυτό και υπάγονται στην κατηγορία των **επιφανειακών** φορέων.

Η **διαφορά** μεταξύ πλακών και δίσκων βρίσκεται στον τρόπο έντασής των. Οι δίσκοι αναλαμβάνουν δυνάμεις που **βρίσκονται** στο μέσο επίπεδό τους, ενώ οι πλάκες αναλαμβάνουν δυνάμεις που ενεργούν **κάθετα** στο επίπεδό τους.

### ε. Κέλυφος

Σαν κελύφη χαρακτηρίζονται οι καμπύλοι επιφανειακοί φορείς που έχουν μικρό πάχος σε σχέση με την επιφάνειά τους.

Η καμπύλωση της μέσης επιφάνειας δυσκολεύει βέβαια τον υπολογισμό, όμως **συμβάλλει ουσιαστικά στην ομαλή και αβίαστη μεταβίβαση** των εξωτερικών **φορτίων** στις στηρίξεις, χωρίς να παράγονται απαράδεκτα μεγάλες εντάσεις ή παραμορφώσεις παρά το μικρό πάχος της επιφάνειας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σημαντική **οικονομία** στο κόστος της κατασκευής.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα κελύφη με μέση επιφάνεια εκ περιστροφής που συναντάμε σε ολοένα αυξανόμενο βαθμό στις κατασκευές (κτίρια εκθέσεων, βιομηχανικά υπόστεγα, στάδια, υπόστεγα αεροπλάνων κλπ.)

## 1.9 – Εξωτερικές δυνάμεις

Οι εξωτερικές δυνάμεις διακρίνονται σε δυο κατηγορίες:

- Στα φορτία και
- Στις αντιδράσεις

### α. Φορτία

Είναι όλες οι δυνάμεις που ενεργούν **άμεσα** στον ελεύθερο φορέα. Τέτοιες δυνάμεις είναι όλες οι εξωτερικές δράσεις, όπως το ωφέλιμο φορτίο, η ανεμοπίεση, το ίδιο βάρος, οι σεισμικές δυνάμεις κλπ.

Τα φορτία είναι δυνατόν να είναι **συγκεντρωμένα** ή **κατανεμημένα** (ομοιόμορφα ή όχι).

Στα συγκεντρωμένα φορτία υπάγονται όλες οι δυνάμεις που γνωρίσαμε ως τώρα και οι ροπές (ζεύγη κλπ).

Κατανεμημένα ή συνεχή είναι τα φορτία που δρουν σε ορισμένο τμήμα του φορέα **συνεχώς**, δηλαδή χωρίς διακοπή. Ο νόμος, σύμφωνα με τον οποίο κατανέμεται το συνεχές φορτίο εκφράζει και το είδος του. Έτσι προκύπτει π.χ.

- το **ομοιόμορφο** φορτίο, που χαρακτηρίζεται από σταθερή ένταση σε όλο το μήκος δράσης (φορτίο χιονιού)
- το **τριγωνικό** ή γραμμικά μεταβαλλόμενο, με γραμμική μεταβολή της έντασης (φορτίο υδροστατικής πίεσης) κλπ
- το **τραπεζοειδές**, που είναι επαλληλία ομοιόμορφου και τριγωνικού φορτίου
- το **παραβολικό** κλπ.

### β. Αντιδράσεις

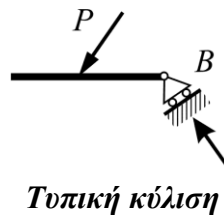
Με τον όρο αυτό χαρακτηρίζουμε τις συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές που ασκούνται στη στήριξη ή στις στηρίξεις του ελεύθερου φορέα (συνήθως από το έδαφος), και είναι ικανές να εξισορροπήσουν όλα τα φορτία.

## 1.10 – Στηρίξεις

Τις στηρίξεις των επιπέδων φορέων διακρίνουμε σε **τρία** είδη:

### 1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση.

Είναι η στήριξη που αποκλείει μια ελευθερία κίνησης (την **κάθετη** στο επίπεδο κύλισης), ενώ επιτρέπει τις άλλες δύο, που είναι η μετακίνηση στο επίπεδο κύλισης και η στροφή.

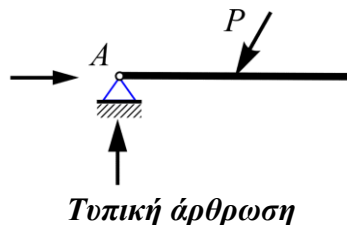


Άρα αναπτύσσεται μόνο μια αντίδραση που είναι **κάθετη** στο επίπεδο κύλισης.

## 2. Άρθρωση

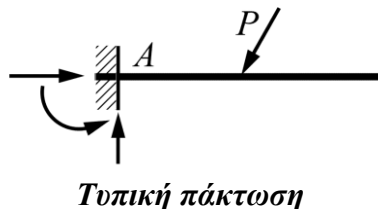
Είναι η στήριξη που αποκλείει την κίνηση **γενικά**, δηλαδή με άλλα λόγια αποκλείει δύο ελευθερίες κίνησης (την **οριζόντια** και την **κατακόρυφη**), ενώ επιτρέπει μόνο την περιστροφή γύρω από την άρθρωση.

Άρα αναπτύσσεται μόνο **οριζόντια** και **κατακόρυφη** αντίδραση.



## 3. Πάκτωση

Το είδος αυτό της στήριξης, δεν επιτρέπει καμιά κίνηση. Εφ' όσον λοιπόν αποκλείει κάθε ελευθερία κίνησης, έπεται ότι θα αναπτύσσονται **τρεις** αντιδράσεις μια **οριζόντια** δύναμη, μια **κατακόρυφη**, καθώς και μια **ροπή**.



Γενικά παρατηρούμε ότι κάθε συνιστώσα αντίδρασης προκύπτει από την **κατάργηση της ελευθερίας** στην αντίστοιχη διεύθυνση.

## 1.11 – Ισοστατικοί και υπερστατικοί φορείς

Διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες φορέων. Τους **ισοστατικούς** και τους **υπερστατικούς**.

Τα κριτήρια κατάταξης ενός φορέα σε κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές δεν είναι δυνατόν να καθοριστούν με τις μέχρι τώρα λιγότερες έννοιες.

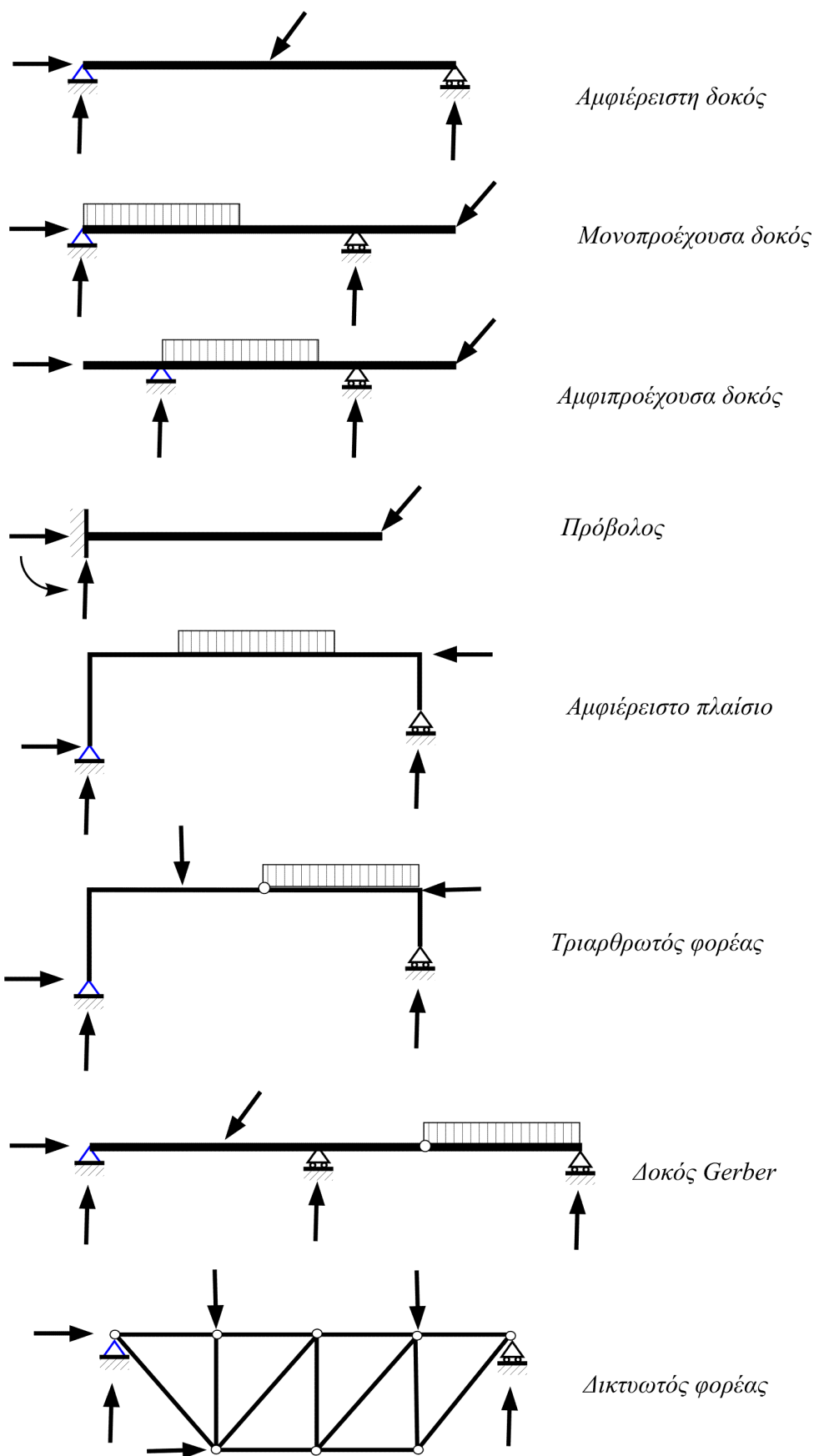
Χονδρικά ωστόσο θα μπορούσαμε να πούμε, ότι με τυχούσα επίπεδη φόρτιση, ένας ισοστατικός φορέας παρουσιάζει συνολικά 3 άγνωστες αντιδράσεις, ενώ ένας υπερστατικός παρουσιάζει περισσότερες των τριών.

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε τόσο με τους ισοστατικούς όσο και με του υπερστατικούς φορείς.

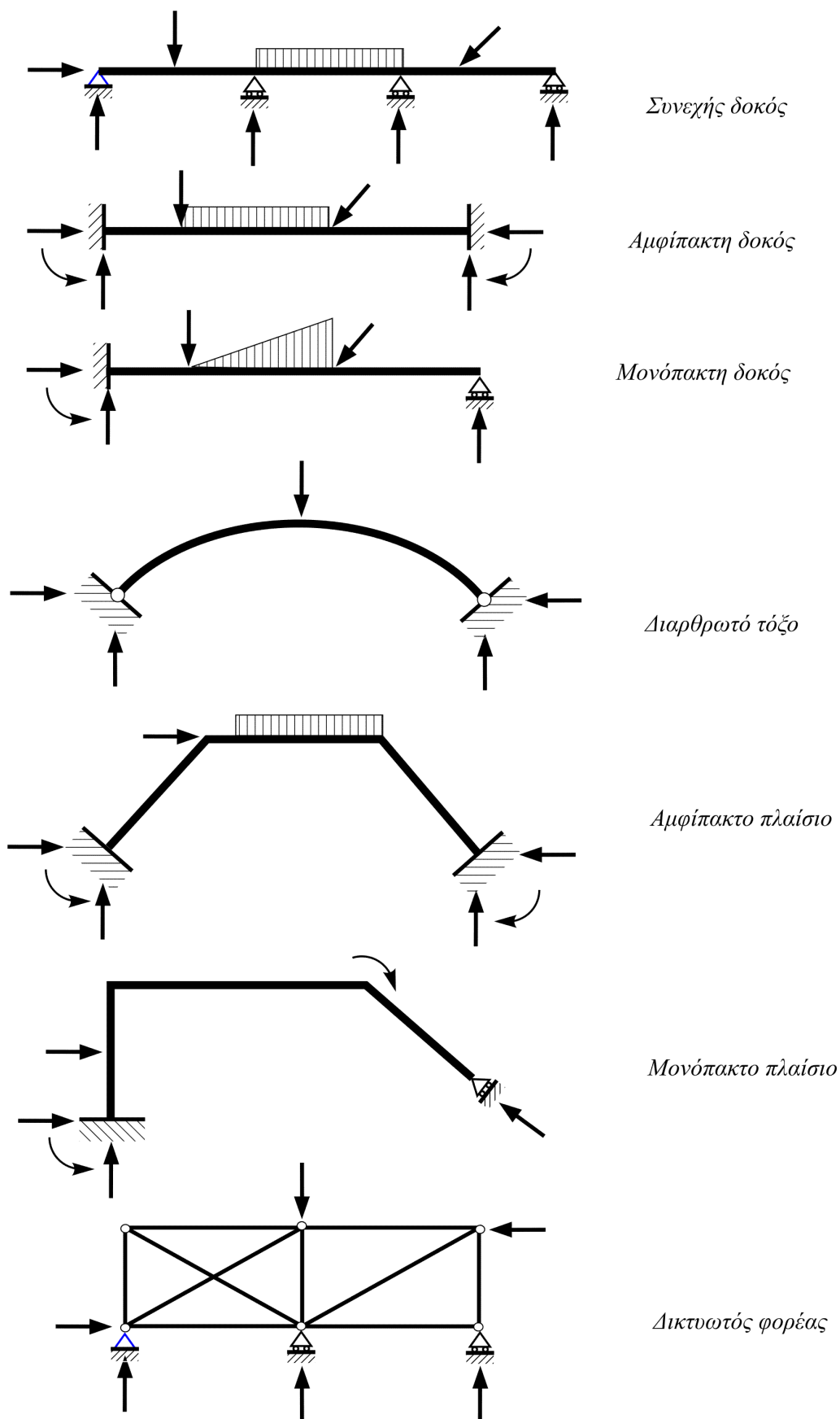
Οι υπερστατικοί φορείς, που κατά κανόνα συναντάμε στην πράξη, αποτελούν αντικείμενο της προχωρημένης στατικής. Άλλωστε η επίλυσή τους προϋποθέτει τη γνώση των μεθόδων επίλυσης των ισοστατικών, ή στατικά ορισμένων φορέων.

Στις χαρακτηριστικές περιπτώσεις ισοστατικών φορέων που εικονίζονται στην επόμενη σελίδα, παρατηρούμε ότι τόσο το τριαρθρωτό τόξο όσο και η δοκός *Gerber*, παρουσιάζουν περισσότερες από 3 αντιδράσεις.

Ωστόσο κατατάσσονται στην κατηγορία των ισοστατικών φορέων, επειδή, όπως θα φανεί αργότερα σε αντίστοιχο κεφάλαιο που περιγράφει τους φορείς αυτούς, είναι δυνατή, λόγω της άρθρωσης που μεσολαβεί στο τριαρθρωτό τόξο, ή της μιας ή περισσότερων αρθρώσεων που μεσολαβούν στη δοκό *Gerber*, η εξεύρεση και των υπολοίπων απαιτούμενων εξισώσεων, για τον προσδιορισμό όλων των αντιδράσεων.



Χαρακτηριστικοί ισοστατικοί φορείς



Χαρακτηριστικοί υπερστατικοί φορείς



### Ισοστατικοί φορείς

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων.

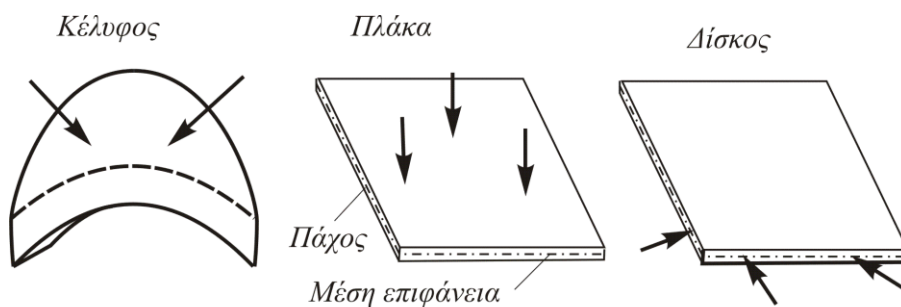
Οι φορείς ανάλογα με τη μορφή τους διακρίνονται στους:

#### 1. Χωρικούς

που είναι σώματα τριών διαστάσεων και παραλαμβάνουν τυχούσες δυνάμεις στο χώρο.

#### 2. Επιφανειακούς

που είναι κατασκευές μικρού πάχους και αναπτύσσονται σε επιφάνεια που ονομάζεται **μέση**. Ανάλογα με τη μορφή της μέσης επιφάνειας, οι επιφανειακοί φορείς, διακρίνονται:



*Τυπική μορφή επιφανειακών φορέων*

**2α. στους κελυφωτούς**, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και δέχονται τυχούσες δυνάμεις.

**2β. στους επίπεδους**, οι οποίοι είναι σώματα σταθερού ή μεταβλητού, πάντως μικρού πάχους, και απλώνονται σε επίπεδη επιφάνεια. Αυτοί με τη σειρά τους διακρίνονται σε **δίσκους** και **πλάκες**, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι επίπεδη. Η διαφορά ανάμεσά τους βρίσκεται στα εξωτερικά φορτία, τα οποία:

- στους **δίσκους** κείνται στο επίπεδο του φορέα,
- στις **πλάκες** είναι κάθετα σ' αυτό (το επίπεδο).

### 3. Γραμμικούς

που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε **επίπεδη** γραμμή που ονομάζεται **άξονας**. Οι γραμμικοί φορείς, ανάλογα με τη μορφή του άξονά τους διακρίνονται στους:

- 3α. **ευθύγραμμους** όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή,
- 3β. **τοξωτούς** όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο **τόξο**,
- 3γ. **πλαισιωτούς** όταν ο άξονας είναι οποιαδήποτε **τεθλασμένη** ευθεία και
- 3δ. **σύνθετους** όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή, καλύπτοντας περισσότερες της μιας από τις παραπάνω περιπτώσεις.

### 2.1 – Η δοκός ως φορέας

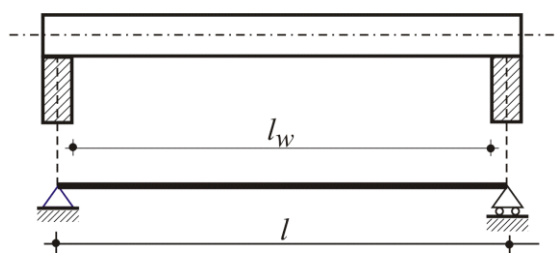
Η έννοια της **δοκού**, που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς (περίπτωση 3<sup>α</sup>), και είναι ένα κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής.

Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μια πρισματική ράβδο, που στηρίζεται στα άκρα της ελεύθερα, πάνω σε δύο στηρίγματα.

Στην πραγματικότητα η δοκός δεν μπορεί να νοηθεί χωρίς πάχος, αλλά ούτε και τα στηρίγματα χωρίς έκταση. Στη θεωρία όμως, μας είναι αρκετό να θεωρούμε τη δοκό μεν σαν ευθύγραμμο τμήμα που ταυτίζεται με τον άξονά της, ενώ τα στηρίγματά της σαν γεωμετρικά σημεία.

Έτσι φθάνουμε στην εξιδανικευμένη μορφή της **απλής αμφιέρειστης** δοκού.

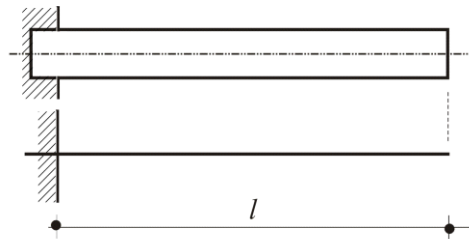
Ακόμα υποθέτουμε ότι το ένα στήριγμα της δοκού είναι αμετάθετο, ενώ το άλλο μπορεί να μετακινηθεί στην επιφάνεια στήριξης χωρίς τριβές.



**Πραγματική και εξιδανικευμένη μορφή αμφιέριστης δοκού**

Η απόσταση ανάμεσα στα δύο στηρίγματα της δοκού ονομάζεται **Θεωρητικό άνοιγμα** και συμβολίζεται με  $l$ , για να διακρίνεται από το **ελεύθερο άνοιγμα**  $l_w$ , που παριστάνει την εσωτερική απόσταση ανάμεσα στους τοίχους στήριξης.

Ένα άλλο είδος δοκού είναι ο **πρόβολος**. Αποτελείται από μια ράβδο της οποίας το ένα άκρο είναι καλά εντοιχισμένο, ενώ το άλλο της άκρο είναι ελεύθερο. Το μήκος που προεξέχει είναι το μήκος  $l$  του προβόλου.

**Πραγματική και εξιδανικευμένη μορφή προβόλου**

Η απλή αμφιέριστη δοκός μπορεί να φέρει πρόβολο προς τα αριστερά ή δεξιά οπότε λέγεται **(μονο)προέχουσα**.

Επίσης μπορεί να φέρει πρόβολο και από τα δύο μέρη, οπότε λέγεται **αμφιπροέχουσα**.

Αν η δοκός εκτείνεται χωρίς διακοπή πάνω από πολλά στηρίγματα, τότε λέγεται **συνεχής**.

Μερικές φορές η συνέχεια διακόπτεται από αρθρώσεις σε παράλληλες θέσεις και αριθμό, οπότε η δοκός ονομάζεται **αρθρωτή** ή **δοκός Gerber**.

Τέλος το σώμα των δοκών είναι άλλοτε **συμπαγές**, όπως π.χ. σε μια δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα, άλλοτε είναι **δικτυωτό**, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους. Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται **ολόσωμοι** δοκοί ενώ οι δεύτερες **δικτυωτές**.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δοκών ή φορέων, ο προσδιορισμός των τάσεων σαν αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων, αποτελεί αντικείμενο μελέτης της Αντοχής των Υλικών και μπορεί να γίνει μόνο αν ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις του σώματος.

Αντίθετα ο προσδιορισμός της **συνισταμένης** των τάσεων, που γίνεται πριν από τον υπολογισμό των τάσεων, αποτελεί πρόβλημα της Δομικής Στατικής και γίνεται με τη βοήθεια στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας σε αποτεμνόμενο τμήμα του σώματος. Όταν ο αριθμός αυτών των εξισώσεων είναι αρκετός, ο φορέας ονομάζεται **εσωτερικά στατικά ορισμένος**.

Όταν οι τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας είναι αρκετές ώστε να οδηγήσουν αποκλειστικά στον προσδιορισμό των εξωτερικών αντιδράσεων, τότε ο φορέας ονομάζεται **εξωτερικά στατικά ορισμένος**.

Αν τώρα ένας φορέας είναι και εσωτερικά και εξωτερικά στατικά ορισμένος, τότε ονομάζεται απλά **στατικά ορισμένος** ή **ισοστατικός**.

Επειδή οι περισσότεροι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι, θεωρούμε έναν φορέα σαν ισοστατικό όταν το πλήθος  $\alpha$  των **αντιδράσεων** του δεν ξεπερνά τον αριθμό 3 που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

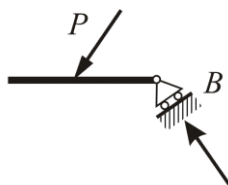
Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όπου  $\alpha > 3$ , ο φορέας ονομάζεται **υπερστατικός** με **βαθμό στατικής αοριστίας** τον αριθμό  $\nu = \alpha - 3$ .

## 2.2 – Οι στηρίξεις

Για τη στήριξη μιας δοκού, όπως ήδη αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων.

### 1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση.

Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές, επιτρέποντας την περιστροφή του φορέα στο επίπεδο φόρτισης.



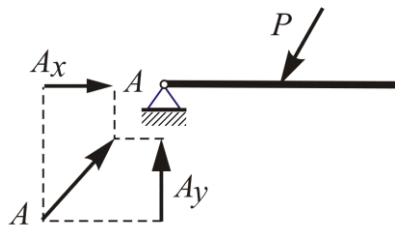
Τυπική μορφή κύλισης

Η αντίδραση είναι δύναμη που περνάει από το σημείο στήριξης, **κάθετα** στην επιφάνεια κύλισης, γιατί κατά τη διεύθυνση αυτή **αποκλείεται** η μετακίνηση του σημείου στήριξης.

Οι μετατοπίσεις που γίνονται στο επίπεδο κύλισης είναι γενικά πολύ μικρές και οφείλονται στις αναπόφευκτες παραμορφώσεις της δοκού από φορτία ή θερμοκρασιακές μεταβολές.

### 2. Άρθρωση

Εδώ το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στερεό σύστημα, μέσω άρθρωσης που επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού πάνω στο επίπεδο φόρτισης.

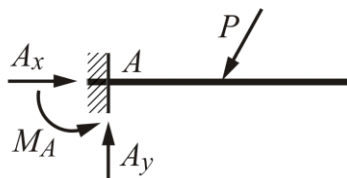


Τυπική μορφή άρθρωσης

Η αντίδραση επομένως  $A$ , που περνάει από την άρθρωση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, γι' αυτό και αναλύεται ουσιαστικά σε **οριζόντια** και **κατακόρυφη** συνιστώσα  $A_x$  και  $A_y$ .

### 3. Πάκτωση

Η στήριξη αυτού του είδους, δεν επιτρέπει καμιά στροφή ή μετακίνηση στο άκρο της δοκού.



Τυπική μορφή πάκτωσης

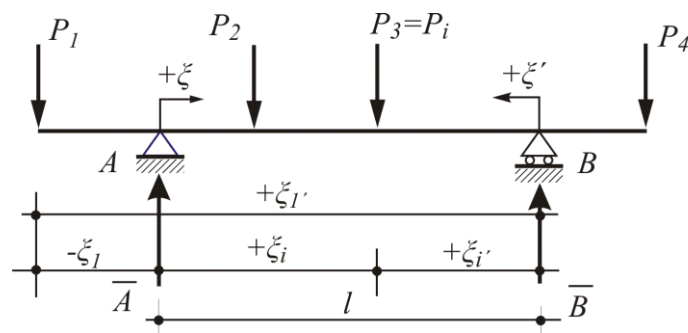
Έτσι, για τις αντιδράσεις, πέρα από την  $A_x$  και  $A_y$  που συναντήσαμε στην άρθρωση, εμφανίζεται εδώ και η αντίδραση ροπή  $M_A$ , που οφείλεται στον αποκλεισμό περιστροφής του φορέα γύρω από το  $A$ .

Γενικά παρατηρούμε ότι κάθε αντίδραση προκύπτει από την κατάργηση της ελευθερίας στην αντίστοιχη διεύθυνση της στήριξης.

## 2.3 – Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις

Όταν μια δοκός βρίσκεται κάτω από την ενέργεια διαφόρων φορτίων, τότε τα σημεία στήριξης μεταφέρουν στο έδαφος ορισμένες δυνάμεις. Αλλά τότε, σύμφωνα με την αρχή της αλληλεπίδρασης, και το έδαφος ασκεί στη δοκό δυνάμεις ίσες και αντίθετες, που τις ονομάζουμε **αντιδράσεις**.

1. Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος που φορτίζεται με φορτία  $P_i$  κάθετα στον άξονά της.



### Φορτία και αντιδράσεις σε αμφιπροέχουσα δοκό

Οι αντιδράσεις  $\bar{A}$  και  $\bar{B}$ , που θα είναι επίσης κάθετες στον άξονα, προσδιορίζονται από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών προς τα δύο σημεία στήριξης. Πραγματικά, αν  $\xi_i$  και  $\xi_i'$  είναι οι αποστάσεις της τυχαίας δύναμης  $P_i$  από τις δύο στηρίξεις, τότε θα είναι:

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -(-P_1\xi_1) + P_2\xi_2 + P_3\xi_3 + P_4\xi_4 - \bar{B} \cdot l = 0 \Rightarrow \sum P_i\xi_i = \bar{B} \cdot l$$

$$(\sum M)_B^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -P_1\xi_1' - P_2\xi_2' - P_3\xi_3' + P_4(-\xi_4') + \bar{A} \cdot l = 0 \Rightarrow \sum P_i\xi_i' = \bar{A} \cdot l$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \sum P_i\xi_i', \quad \bar{B} = \frac{1}{l} \sum P_i\xi_i \quad (1)$$

Στις σχέσεις (1), οι τετμημένες  $\xi_i$  και  $\xi_i'$  της τυχαίας δύναμης  $P_i$  είναι θετικές όταν η  $P_i$  ευρίσκεται μεταξύ των A και B.

Η συνθήκη μηδενισμού των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων  $\sum y^{\uparrow+} = 0$ , θα δώσει τώρα τη σχέση:

$$\bar{A} + \bar{B} = \sum P_i,$$

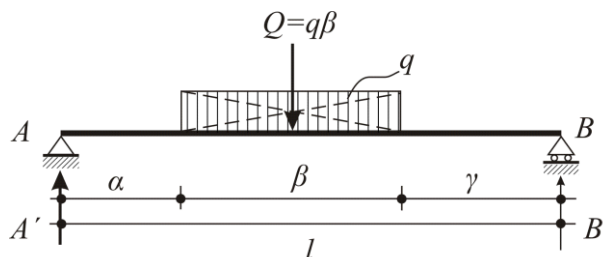
που χρησιμεύει μόνο για επαλήθευση.

2. Τα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα είναι συγκεντρωμένα, δηλαδή έχουν ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής. Είναι όμως δυνατόν τα φορτία να μη συγκεντρώνουν τη δράση τους σε ένα μόνο σημείο αλλά να εκτείνονται συνεχώς σ' όλη τη δοκό ή ένα μόνο τμήμα της, κατακόρυφα.

Ένα τέτοιο φορτίο ορίζεται αν γνωρίζουμε την τιμή του  $q$  ανά μονάδα μήκους. Έτσι λέμε π.χ. ότι σε μια δοκό ενεργεί φορτίο συνεχές και ομοιόμορφο ή απλά ομοιόμορφο ίσο με  $2\text{N/m}$ , που σημαίνει ότι σε μήκος ενός μέτρου, απλώνεται φορτίο  $2\text{N}$  το οποίο θεωρείται ότι δρα στο μέσον του μήκους του.

Γραφικά παριστάνεται, με ένα ορθογώνιο, του οποίου η βάση είναι το φορτιζόμενο μήκος, ενώ το ύψος του, με μια κλίμακα δυνάμεων, η ανά μονάδα μήκους τιμή  $q$  του φορτίου που ονομάζεται **ένταση**.

Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος, όπου το ομοιόμορφο φορτίο, έντασης  $q$ , ενεργεί ασύμμετρα σε ένα τμήμα της δοκού.



Οι αντιδράσεις  $A'$  και  $B'$ , άνισες και κάθετες στον οριζόντιο άξονα της δοκού, θα προσδιοριστούν με το σκεπτικό της προηγούμενης παραγράφου, αφού πρώτα μετατραπεί το συνεχές φορτίο σε συγκεντρωμένο, με ένταση  $Q=q\beta$  και φορέα κατακόρυφο που περνάει από το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1), έχουμε:

$$A' = Q \frac{\xi'}{l} = q\beta \frac{\gamma + \beta/2}{l}$$

$$B' = Q \frac{\xi}{l} = q\beta \frac{\alpha + \beta/2}{l}$$

**3.** Όταν το φορτίο είναι συνεχές αλλά όχι ομοιόμορφο, που σημαίνει ότι η ένταση του συνεχούς φορτίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης, που εκφράζει τη συνισταμένη του συνεχούς φορτίου σε ένταση, και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης, από όπου περνάει ο φορέας της συνισταμένης.

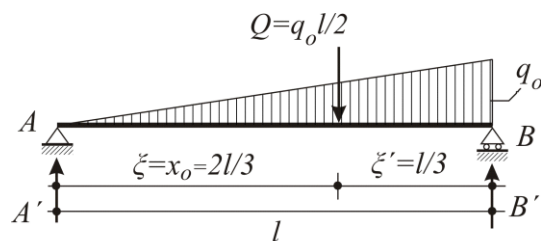
Έστω για παράδειγμα η δοκός  $AB$  του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο και έχει ακραία τιμή στο στήριγμα  $B$  ίση με  $q_o$ .

Αν  $Q$  είναι η ένταση της συνισταμένης (εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης) και  $x_o$  η απόσταση του φορέα της (κεντροειδές) από το αριστερό στήριγμα  $A$ , τότε θα είναι:

$$A' = Q \frac{l - x_o}{l}, \quad \text{και} \quad B' = Q \frac{x_o}{l}.$$

Η συνισταμένη του φορτίου αυτού έχει ένταση ίση με το εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας φόρτισης, δηλαδή:

$$Q = \frac{1}{2} q_o l,$$



και θα βρίσκεται σε απόσταση από το A ίση προς την τετμημένη του κεντροειδούς του τριγώνου, δηλαδή  $2l/3$ . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το κεντροειδές ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.

Άρα οι αντιδράσεις θα είναι:

$$A' = \frac{Q\xi'}{l} = \frac{q_o l}{2} \cdot \frac{l}{3l} = \frac{q_o l}{6} \text{ και}$$

$$B' = \frac{Q\xi}{l} = \frac{q_o l}{3}$$

**Σημείωση:** Αν στις παραπάνω περιπτώσεις εμφανιστούν σαν εξωτερικά φορτία και **συγκεντρωμένες ροπές**, τότε αυτές προστίθενται αλγεβρικά (ανάλογα με τη φορά τους) στις συνθήκες μηδενισμού των ροπών της παραγράφου 1, **χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση** εφαρμογής τους.

## 2.4 – Τα φορτία διατομής

Η δοκός σαν κατασκευαστικό στοιχείο συναντάται πάρα πολύ συχνά στην πράξη. Μπορεί να πάρει δυνάμεις και κατά τη διεύθυνση του άξονά της και κάθετα σ' αυτόν. Μπορεί δηλαδή να ενταθεί όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, καμπτικά ή στρεπτικά, δηλαδή σύνθετα.

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων, εφ' όσον βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα της δοκού, έχει σα συνέπεια την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή τριών γενικά εντατικών μεγεθών, που ονομάζονται **φορτία διατομής**.

Τα φορτία διατομής, που συμβολίζονται αντίστοιχα με τα γράμματα **N**, **Q**, **M**, είναι:

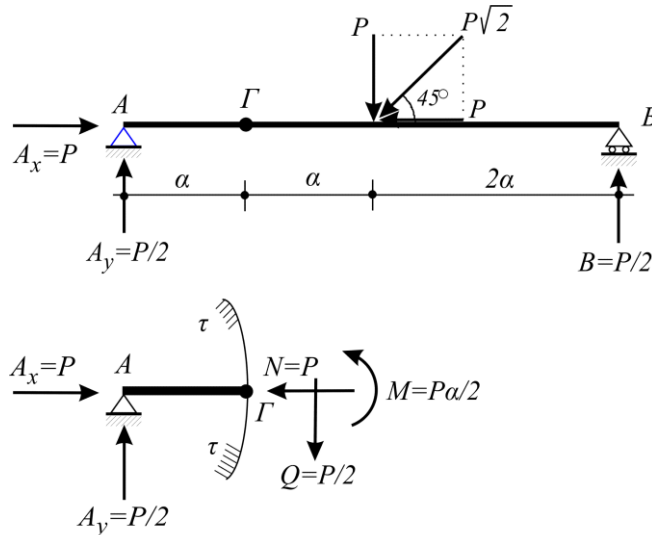
1. Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
2. Η τέμνουσα δύναμη (Q) και
3. Η ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή (M)

Αν υπολογίσουμε τα N, Q, M σε κάθε διατομή του φορέα, και, με κάποια κλίμακα, σχεδιάσουμε τις τεταγμένες των τιμών τους κατά μήκος του φορέα, θα πάρουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (N), (Q), (M).



Αν ο φορέας είναι στο χώρο, τότε εκτός από την καμπτική ροπή σε τυχούσα διατομή, εμφανίζεται και ροπή στρέψης  $M_t$ .

Για να γνωρίσουμε τα φορτία διατομής θεωρούμε την αμφιέριστη δοκό του σχήματος που φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο  $P\sqrt{2}$  υπό γωνία  $45^\circ$ .



Τα φορτία διατομής στη θέση Γ

Αν αναλύσουμε την  $P\sqrt{2}$  σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, κάθε μία ίση με  $P$ , μπορούμε τότε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας τις τρεις γνωστές στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας.

$$(\Sigma M)_\Gamma^{\leftarrow +} = 0 \Rightarrow P \cdot 2a - B \cdot 4a = 0 \Rightarrow B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma y^{\uparrow +} = 0 \Rightarrow A_y - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow +} = 0 \Rightarrow A_x - P = 0 \Rightarrow A_x = P$$

Απομονώνοντας τώρα το τμήμα ΑΓ με την τομή ττ, ας εξετάσουμε την ισορροπία του.

Για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την οριζόντια έννοια και να ισχύει επομένως η συνθήκη  $\Sigma F_x^{\rightarrow +} = 0$ , θα πρέπει στο **κεντροειδές της διατομής Γ** και **κάθετα** προς αυτή, να ασκηθεί δύναμη  $N = P$ , ίση και αντίθετη της  $A_x = P$ .

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί παράλληλα προς τον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η **αξονική ή ορθή δύναμη N**.

Όμοια, για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την κατακόρυφη έννοια και συνεπώς να ισχύει η συνθήκη  $\Sigma F_y^{\uparrow +} = 0$ , θα πρέπει, πάντα **πάνω στη διατομή Γ**, να τοποθετηθεί η δύναμη  $Q = P/2$ , ίση και αντίθετη της  $A_y = P/2$ .

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί **κάθετα** στον άξονα του φορέα και **πάνω** στη διατομή είναι η **τέμνουσα δύναμη** ( $Q$ ).

Τέλος για να εξασφαλίσουμε το άστρεπτο του τμήματος  $ΑΓ$ , ώστε να ισχύει η συνθήκη  $(\Sigma M)_Γ^{-+} = 0$ , θα πρέπει, **στο κεντροειδές της διατομής**  $\Gamma$ , να εμφανιστεί ροπή  $M = P \cdot a/2$  ίση και αντίθετη με εκείνη που δημιουργεί στην ίδια διατομή ( $\Gamma$ ) η αντίδραση  $A_Y$ , που είναι  $M' = A_Y \cdot a = P \cdot a/2$ .

Η ροπή αυτή, είναι η **ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή** ( $M$ ).

## 2.5 – Σήμανση των φορτίων διατομής

Για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους  $N$  ή  $Q$  ή  $M$  μιας διατομής υπολογίζεται το αλγεβρικό άθροισμα **όλων** των δυνάμεων (εξωτερικών φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται **αριστερά** ή **δεξιά** της διατομής και επηρεάζουν το συγκεκριμένο μέγεθος.

Το κριτήριο για την από αριστερά ή δεξιά επιλογή, είναι ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων ή ροπών αντίστοιχα που συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Όταν σε μια **συγκεκριμένη** διατομή του φορέα ασκείται:

- α) συγκεντρωμένη **δύναμη** που είναι κάθετη στη διατομή (**αξονικά**)
- β) συγκεντρωμένη **δύναμη** που κείται στη διατομή (**τμητικά**) ή
- γ) **συγκεντρωμένη ροπή**,

τότε στη διατομή αυτή είναι **αδύνατος** αντίστοιχα ο προσδιορισμός της:

- α) αξονικής δύναμης  $N$
- β) τέμνουσας δύναμης  $Q$  και
- γ) καμπτικής ροπής  $M$ .

Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός του υπόψη εντατικού μεγέθους γίνεται για την **αριστερή ή δεξιά παρειά** (πλευρά) της διατομής, οπότε παρουσιάζεται **διαφορά** μεταξύ των τιμών των δύο παρειών, που ισούται με την **τιμή** του συγκεντρωμένου **φορτίου** στη διατομή.

Το φαινόμενο αυτό, για το αντίστοιχο διάγραμμα ( $N$ ), ( $Q$ ) ή ( $M$ ) είναι γνωστό σαν **άλμα**.

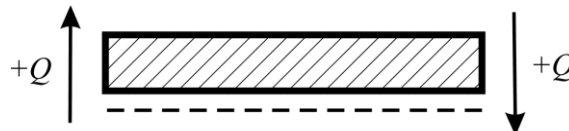
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους σε μια διατομή, θα πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το πότε μια δύναμη ή ροπή δίνει θετική ή αρνητική τιμή στο προσδιοριζόμενο εντατικό μέγεθος.

**Ανεξάρτητα** λοιπόν του αν η οποιαδήποτε δύναμη ή ροπή που προκαλεί ένα εντατικό μέγεθος, βρίσκεται **αριστερά** ή **δεξιά** της διατομής (ή παρειάς της):



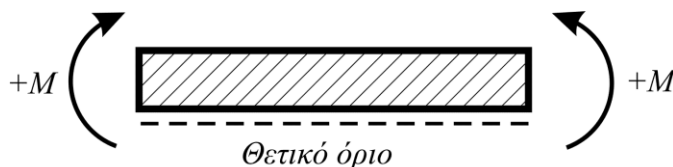
Σήμανση αξονικών δυνάμεων

1. Η αξονική δύναμη  $N$  που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **Θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει** τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την **θλίψει**.



Σήμανση τεμνουσών δυνάμεων

2. Η τέμνουσα δύναμη  $Q$  που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **Θετική** όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί **δεξιόστροφα** ως προς τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να περιστραφεί **αριστερόστροφα**.



Θετικό όριο

Σήμανση καμπτικών ροπών

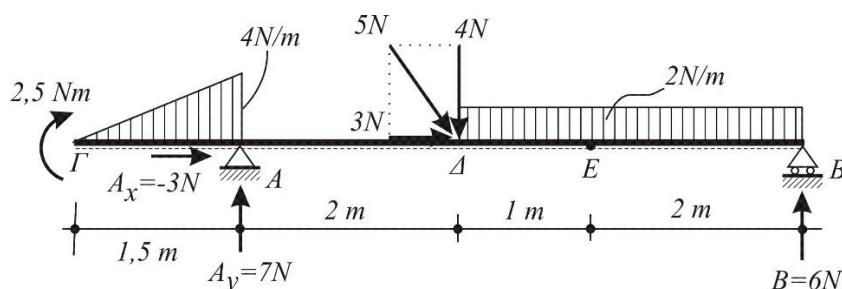
3. Η καμπτική ροπή  $M$  που εμφανίζεται σε μια διατομή είναι **Θετική** όταν η δύναμη ή η συγκεντρωμένη ροπή που την προκαλεί τείνει να **εφελκύσει την κάτω ίνα** του φορέα στη θέση της διατομής. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την **θλίψει**.

Η κάτω ίνα του φορέα είναι γνωστή και σαν **Θετικό όριο** και συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή. Στην περίπτωση κατακόρυφου τμήματος του φορέα, η επιλογή του Θετικού ορίου (προς τα αριστερά ή δεξιά) είναι αυθαίρετη.

## Παράδειγμα

Στη μονοπροέχουσα δοκό του σχήματος, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις  $A$  και  $B$ , καθώς και οι τιμές των  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  στις διατομές  $\Gamma$ ,  $\Delta$  και  $E$ .

### Λύση



Οι αντιδράσεις θα προκύψουν από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - B \cdot 5 = 0 \Rightarrow B = 6 \text{ N}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 4 - 2 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow A_y = 7 \text{ N}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow A_x + 3 = 0 \quad A_x = -3 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο της  $A_x$  δηλώνει ότι η σωστή φορά της  $A_x$  είναι αντίθετη από εκείνη που διαλέξαμε.

Προαιρετικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις αντιδράσεις  $A_y$  και  $B$ , ή μόνον την  $A_y$ , παίρνοντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τυχόν σημείο του άξονα του φορέα, ή τη στήριξη  $B$  αντίστοιχα.

$$(\Sigma M)_B^{\perp+} = 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 5,5 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0!$$

#### Διατομή Γ (δυνάμεις από αριστερά)

Λόγω της συγκεντρωμένης ροπής στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την καμπτική ροπή, οπότε θα έχουμε:

$$N = 0, \quad Q = 0,$$

$$M^{ap} = 0, \quad \text{ενώ}$$

$$M^{\delta\epsilon\chi} = + 2,5 \text{ Nm}, \text{ επειδή, καθώς ασκείται, εφελκύει το θετικό όριο.}$$

#### Διατομή Δ (δυνάμεις από δεξιά)

Λόγω συγκεντρωμένης οριζόντιας και κατακόρυφης δύναμης στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την αξονική και την τέμνουσα δύναμη, οπότε θα έχουμε:

$$N_{\Delta}^{ap} = + 3 \text{ N}$$

$$N_{\Delta}^{\delta\epsilon\chi} = 0$$

$$Q_{\Delta}^{ap} = 4 + 2 \cdot 3 - 6 = + 4 \text{ N}$$

$$Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\chi} = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M = - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 = + 9 \text{ Nm}$$

#### Διατομή Ε (δυνάμεις από δεξιά)

Εδώ δε γίνεται διάκριση τιμών στις παρειές της διατομής για κανένα εντατικό μέγεθος, επειδή δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη, ούτε οριζόντια ή κατακόρυφη δύναμη, ούτε ροπή.

Το συνεχές φορτίο στη διατομή δεν θεωρείται συγκεντρωμένη δύναμη, διότι το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που αντιστοιχεί στη διατομή είναι μηδέν. Άρα θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \text{ N}$$

$$M = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 8 \text{ Nm.}$$

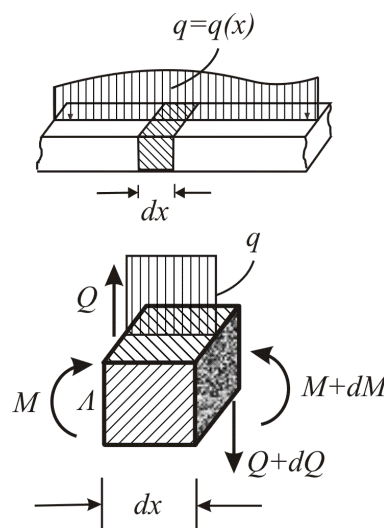
## 2.6 – Βασικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών $q$ , $Q$ & $M$

Θεωρούμε ένα τμήμα από μια δοκό του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται με συνεχή φόρτιση μεταβλητής έντασης  $q = q(x)$ .

Αν αποκόψουμε από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $dx$ , με δυο τομές κάθετες στον άξονά της, σε αποστάσεις  $x$  και  $x+dx$ , παρατηρούμε ότι στο τμήμα αυτό η ένταση της συνεχούς φόρτισης είναι σταθερή, με μέγεθος, έστω  $q$ .

Επίσης, αν  $Q$  και  $M$  η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στην αριστερή διατομή του τμήματος, τότε στη δεξιά διατομή του, λόγω του ομοιόμορφου φορτίου που μεσολαβεί, τα αντίστοιχα μεγέθη θα εμφανιστούν με αντίθετες φορές, και τιμές ελάχιστα διαφορετικές, έστω  $Q+dQ$  και  $M+dM$ . Οι απειροστές ποσότητες  $dQ$  και  $dM$  είναι δυνατόν να είναι και αρνητικές.

Τώρα, στο στοιχειώδες τμήμα που ισορροπεί, η χρησιμοποίηση της συνθήκης μηδενισμού των κατακόρυφων δυνάμεων, δίνει:



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος του στοιχειώδους τμήματος

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Q - q \cdot dx - Q - dQ = 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (\text{i})$$

Επίσης, η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς την αριστερή διατομή του τμήματος, δίνει:

$$(\Sigma M)_{\Lambda}^{\perp\perp} = 0 \Rightarrow M + q \cdot dx \frac{dx}{2} + (Q + dQ)dx - M - dM = 0,$$

από την οποία, παραλείποντας τους όρους  $\frac{q \cdot dx^2}{2}$  και  $dQ \cdot dx$  σαν απειροστά ανώτερης τάξης, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (\text{ii})$$

Οι σχέσεις (i) και (ii) συνδυαζόμενες μεταξύ τους, δηλώνουν ότι:

1. Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού, όπου  $q=0$ , η τέμνουσα δύναμη  $Q$ , σαν ολοκλήρωμα της  $q$ , έχει σταθερή τιμή, ενώ η καμπτική ροπή  $M$ , σαν ολοκλήρωμα της  $Q$ , μεταβάλλεται γραμμικά.

2. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται ομοιόμορφα, όπου  $q=a$  σταθ., η  $Q$  μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση του  $x$ , ενώ η  $M$  μεταβάλλεται παραβολικά.

3. Σε περιοχή της δοκού η οποία φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), όπου  $q=ax+\beta$ , η  $Q$  μεταβάλλεται παραβολικά σε σχέση με το  $x$ , ενώ η  $M$  μεταβάλλεται κατά καμπύλη 3<sup>ου</sup> βαθμού κ.ο.κ. Γενικά, αν η εξωτερική φόρτιση σε τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση βαθμού  $n$ , τότε η τέμνουσα δύναμη που αντιστοιχεί στο ίδιο τμήμα είναι βαθμού  $n+1$ , ενώ η καμπτική ροπή  $n+2$ .

4. Η  $M$  παίρνει ακρότατη τιμή και μάλιστα μέγιστη, εκεί όπου μηδενίζεται η  $Q$ .

5. Η  $M$  σε κάποια διατομή μπορεί να υπολογιστεί, αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής προσθέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δυο διατομές. Πραγματικά, αν  $M_o$  είναι η καμπτική ροπή στη θέση  $x_o$  και  $M$  η αντίστοιχη στη θέση  $x$ , η σχέση (ii), που γράφεται:

$$dM = Q \cdot dx,$$

μετά από ολοκλήρωση από  $x_o$  έως  $x$ , δίνει:

$$\int_{M_o}^M dM = \int_{x_o}^x Q \cdot dx \quad \text{ή} \quad M - M_o = \int_{x_o}^x Q \cdot dx,$$

$$\text{ή τελικά} \quad M = M_o + \int_{x_o}^x Q \cdot dx$$

6. Η **κλίση** της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος **τεμνουσών δυνάμεων**, ισούται με την **τιμή της εξωτερικής φόρτισης  $q$**  που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

Εντελώς ανάλογα, η **κλίση** της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος καμπτικών **ροπών ( $M$ )**, ισούται με την **τιμή της τέμνουσας δύναμης  $Q$**  που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το τμήμα που εξετάζουμε διατομή του φορέα.

## 2.7 – Κατασκευή των διαγραμμάτων $Q$ και $M$

Η έννοια του διαγράμματος ενός εντατικού μεγέθους ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση των τιμών που λαμβάνει το υπόψη εντατικό μέγεθος σε κάθε διατομή του φορέα.

Η γραφική αυτή παράσταση γίνεται σε ανάλογο προς τη μορφή του φορέα σύστημα αξόνων, όπου ο άξονας των τετμημένων είναι ίδιος με τον άξονα του φορέα, ορίζοντας έτσι τις θέσεις των διατομών, ενώ οι τεταγμένες δίνουν τις αντίστοιχες τιμές του εντατικού μεγέθους.

Παραλείποντας το διάγραμμα ( $N$ ) λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει αλλά και της περιορισμένης χρησιμότητάς του, θ' αναφερθούμε στην κατασκευή των διαγραμμάτων ( $Q$ ) και ( $M$ ), η οποία μπορεί να γίνει:

- α) γραφικά με τη βοήθεια του σχοινοπολυγώνου και
- β) αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Η πρώτη μέθοδος συναντιέται συνήθως μόνο στις περιπτώσεις όπου τα φορτία της δοκού είναι συγκεντρωμένα, χωρίς να εμφανίζεται συγκεντρωμένη ροπή. Και αυτό επειδή η ύπαρξη συνεχούς φορτίου απαιτεί το χωρισμό του σε μικρότερα τμήματα, τα οποία θα αντικατασταθούν από συγκεντρωμένες δυνάμεις, των οποίων ο αριθμός είναι ανάλογος με την ακρίβεια που επιδιώκουμε.

Η δεύτερη μέθοδος, η οποία θα μας απασχολήσει κυρίως παρακάτω, καλύπτει κάθε μορφή ισοστατικής δοκού με οποιαδήποτε φόρτιση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την κατασκευή των διαγραμμάτων  $Q$  και  $M$  με τη μέθοδο αυτή, είναι:

1. Χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια, την εμφάνιση:
  - συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα  $Q$ ), ή συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα  $M$ ),
  - αρχής, τέλους ή άλματος στη συνεχή φόρτιση

Μ' άλλα λόγια, ο νόμος που εκφράζει τη μεταβολή της εξωτερικής φόρτισης, να είναι ο ίδιος σε όλο το τμήμα.

2. Ξεκινώντας από το πρώτο τμήμα, αποφασίζουμε το **από πού** θα πάρουμε τις δυνάμεις που επηρεάζουν το εντατικό μέγεθος που εξετάζουμε (αριστερά ή δεξιά της τυχαίας διατομής), διαλέγοντας, για διευκόλυνση, απ' εκεί που υπάρχει ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων.

3. Ορίζουμε σε παρένθεση τα όρια **αριστερά** και **δεξιά**, μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται η τυχαία διατομή του τμήματος, σαν αποστάσεις των άκρων του τμήματος από οποιοδήποτε τέρμα της δοκού. Στην περίπτωση που ορίζουμε σαν αφετηρία το δεξιό τέρμα, το σημειώνουμε [π.χ.  $(3 < x < 7)$  από δεξ.].

4. Σχηματίζουμε τώρα, συναρτήσεϊ του  $x$ , την εξίσωση που εκφράζει τη μεταβολή του εντατικού μεγέθους, παίρνοντας, **απ' τη διατομή και πέρα** μέχρι το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού, **όλες** τις:

- κατακόρυφες δυνάμεις και αντιδράσεις (για το διάγραμμα  $Q$ )
- συγκεντρωμένες ροπές και ροπές των δυνάμεων και αντιδράσεων **ως προς την τυχαία διατομή** (για το διάγραμμα  $M$ ).

5. Ελέγχουμε το βαθμό της εξίσωσης που προέκυψε για το εντατικό μέγεθος, ανάλογα με τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης στο τμήμα (σχέσεις i και ii της ενότητας 2.6).

6. Θέτοντας ήδη στην εξίσωση, όπου  $x$ , τα όρια  $a$  και  $\delta$ , προσδιορίζουμε τις τιμές του μεγέθους στα άκρα του τμήματος. Τις τιμές αυτές τοποθετούμε με κατάλληλη κλίμακα τεταγμένων, στις αντίστοιχες θέσεις του άξονα των τετμημένων, που σχεδιάσαμε ήδη, για την κατασκευή του διαγράμματος.

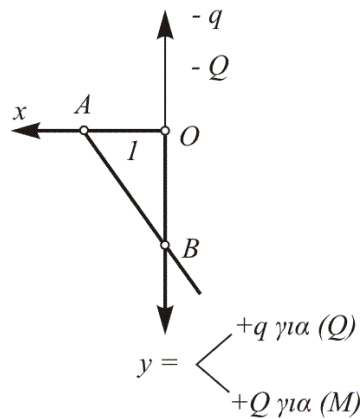
Αν η γραμμή που εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους είναι ευθεία, ενώνουμε τις τεταγμένες των άκρων της. Αν όμως είναι καμπύλη, τότε,

7. Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες της καμπύλης (σκεπτικό 6 της ενότητας 2.6) στα χαρακτηριστικά σημεία, των οποίων προσδιορίσαμε ήδη τις τεταγμένες τους, σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους:

**α)** Σχεδιάζουμε το σύστημα αξόνων του σχήματος, που είναι το γνωστό μας Καρτεσιανό, αλλά με αντίθετες τις φορές των αξόνων.

Στον άξονα  $Ox$  παίρνουμε τμήμα  $OA$  ίσο με τη **μονάδα μήκους** του άξονα των τετμημένων του διαγράμματος που σχεδιάζουμε (συνηθέστατα ο άξονας είναι ίσος με τον άξονα της δοκού). Στον άξονα  $Oy$ , θέτουμε με την κλίμακα **τιμών του διαγράμματος που κατασκευάζουμε**, την τιμή  $B$  που είναι τιμή:



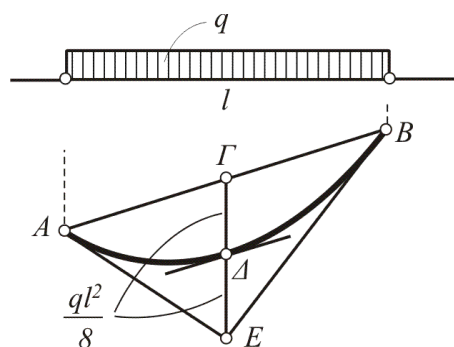


### Γραφικός προσδιορισμός των εφαπτομένων διαγράμματος $Q$

- της εξωτερικής φόρτισης  $q$  που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα  $Q$ )
- της τέμνουσας δύναμης  $Q$  που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα  $M$ )

Η  $AB$  είναι τότε η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος.

Είναι ευκολονόητο, ότι στις διατομές όπου η  $q$  ή η  $Q$  είναι  $0$ , η εφαπτομένη του διαγράμματος ( $Q$ ) ή ( $M$ ) αντίστοιχα, είναι **οριζόντια**.



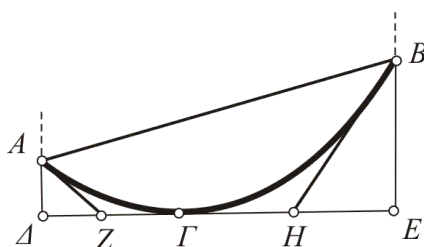
### Γραφικός προσδιορισμός εφαπτομένων σε τμήμα ομοιόμορφης φόρτισης

**β)** Για την κατασκευή του παραβολικού τμήματος που περνάει από δύο σημεία  $A, B$  του διαγράμματος ( $M$ ), βλ. προηγούμενο σχήμα, όταν είναι γνωστό ότι το τμήμα  $l$  του φορέα που είναι ανάμεσα στα σημεία αυτά φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο  $q$ , αν από το μέσο  $\Gamma$  της  $AB$  φέρουμε κατακόρυφα τμήματα,

$$\Gamma\Delta = \Delta E = \frac{ql^2}{8} ,$$

τότε η παραβολή περνάει από το σημείο  $\Delta$  και εφάπτεται των ευθειών  $AE$  και  $BE$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Επίσης εφάπτεται της ευθείας που είναι παράλληλη προς την  $AB$  και περνάει από το  $\Delta$ .

γ) Αν είναι γνωστό ότι η παραπάνω παραβολή περνάει από τα σημεία  $A$  και  $B$  του σχήματος και ότι το  $\Gamma$  είναι ακρότατο της παραβολής, τότε η κατασκευή των εφαπτόμενων στα  $A$  και  $B$  ακολουθεί τον τρόπο που φαίνεται ήδη στο σχήμα. Δηλαδή:



Από το  $\Gamma$  που είναι ακρότατο, φέρουμε οριζόντια ευθεία, η οποία τέμνεται από τις κατακόρυφες που περνούν από τα  $A$  και  $B$ , στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των οριζοντίων τμημάτων  $\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E$ , τότε οι ευθείες  $AZ$  και  $BH$  είναι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

### Σημείωση:

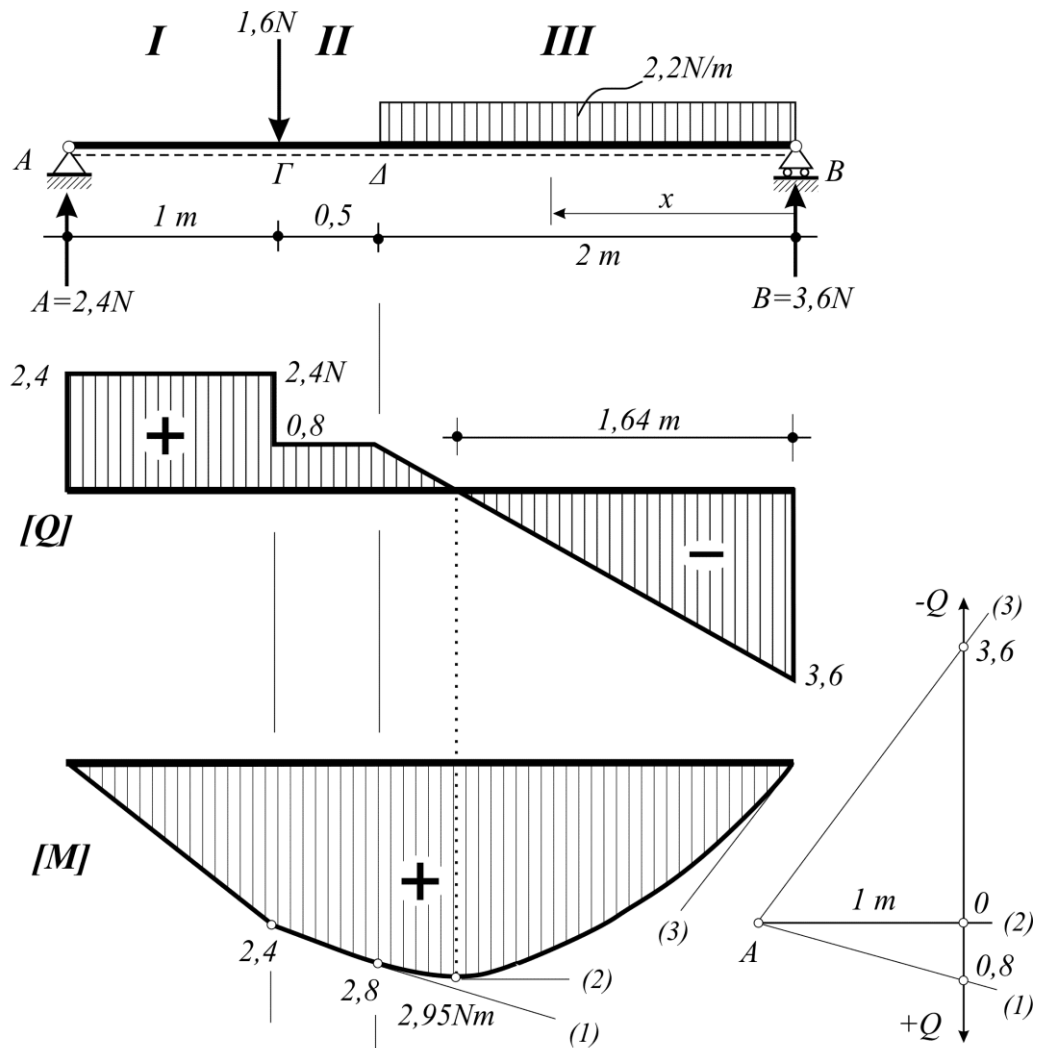
Στα παραδείγματα κατασκευής των διαγραμμάτων  $Q$  και  $M$  που ακολουθούν γίνεται **αυστηρή τήρηση** των παραπάνω βημάτων. Έτσι θα αποφεύγονται επαναλαμβανόμενες επεξηγήσεις ή διευκρινήσεις στις επί μέρους εξισώσεις ή κατασκευές.

Διευκρινήσεις θα δίνονται μόνον όταν, λόγω ιδιομορφίας κρίνεται απαραίτητο, έτσι ώστε να βοηθήσουν αποτελεσματικά στην κατανόηση των διαγραμμάτων από τους φοιτητές.

## Παραδείγματα

1

Της αμφιέρειστης δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων ( $Q$ ) και καμπτικών ροπών ( $M$ ).



Διαγράμματα  $Q$  και  $M$  αμφιερείστου δοκού

### Λύση

#### Αντιδράσεις

Λόγω απουσίας οριζόντιας συνιστώσας στην εξωτερική φόρτιση, θα είναι  $A_x=0$ .

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 1,6 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 \cdot 2,5 - 3,6 \cdot B = 0 \Rightarrow B = 3,6 \text{ N}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 1,6 - 2,2 \cdot 2 + 3,6 = 0 \Rightarrow A = 2,4 \text{ N}$$

Επαλήθευση αντιδράσεων

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{+} = 2,4 \cdot 1,5 - 1,6 \cdot 0,5 + 2,2 \cdot 2 \cdot 1 - 3,6 \cdot 2 = 0 !$$

**Διάγραμμα Q****Τμήμα I** ( $0 < x < 1$ )

$$Q_I = 2,4 \text{ N}$$

**Τμήμα II** ( $1 < x \leq 1,5$ )

$$Q_{II} = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ N σταθ.}$$

**Τμήμα III** ( $0 < x \leq 2$ ) από δεξ.

$$Q_{III} = 2,2x - 3,6$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -3,6 \text{ N}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Delta} = 0,8 \text{ N}$$

Μετά την παρατήρηση ότι η τέμνουσα αλλάζει πρόσημο στα άκρα του τμήματος, βρίσκουμε το σημείο μηδενισμού της. Είναι :

$$Q_{III} = 0, \text{ για } 2,2x - 3,6 = 0 \Rightarrow x = 1,64 \text{ m.}$$

**Διάγραμμα M****Τμήμα I** ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$M_I = 2,4x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow M_{\Gamma} = 2,4 \text{ Nm}$$

**Τμήμα II** ( $1 \leq x \leq 1,5$ )

$$M_{II} = 2,4x - 1,6(x - 1).$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_{\Gamma} = 2,4 \text{ Nm,}$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_{\Delta} = 2,8 \text{ Nm.}$$

**Τμήμα III** ( $0 \leq x \leq 2$ ) από δεξ.

$$M_{III} = 3,6x - 2,2 \cdot x \cdot x / 2 = 3,6x - 1,1x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_{\Delta} = 2,8 \text{ Nm,}$$

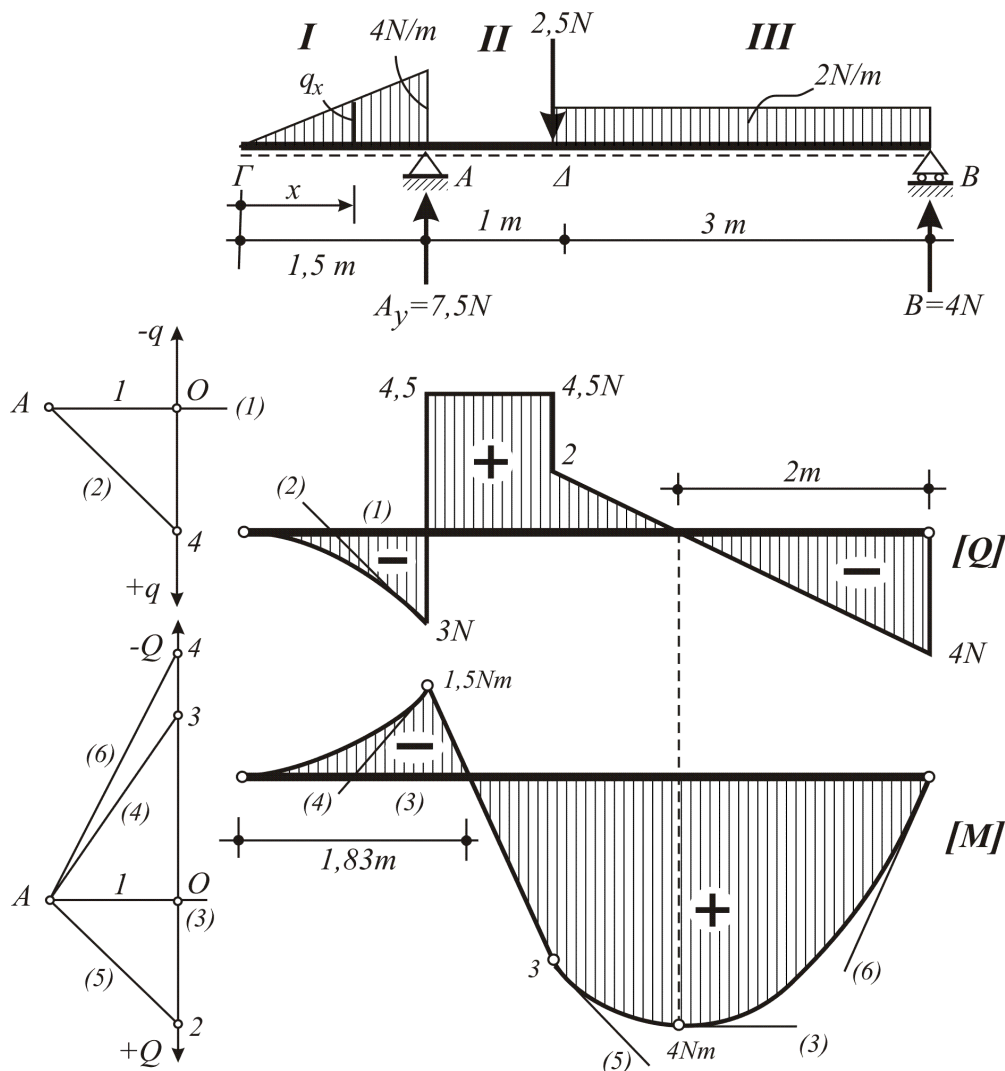
$$x = 1,64 \text{ m} \Rightarrow M_{III \max} = 2,95 \text{ Nm}$$

**Παρατήρηση:**

Η ευθεία του διαγράμματος (M) της περιοχής II, είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (1) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής III.

2

Της μονοπροέχουσας δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων ( $Q$ ) και καμπτικών ροπών ( $M$ ) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.



Διαγράμματα  $Q$  και  $M$  της δοκού

## Λύση

### Αντιδράσεις

Λόγω έλλειψης οριζόντιας συνιστώσας στην εξωτερική μας φόρτιση, έπεται ότι δεν θα υπάρχει οριζόντια αντίδραση στη στην άρθρωση  $A$ , δηλαδή  $A_x = 0$ .

$$(\Sigma M)_A^{\leftarrow +} = 0 \Rightarrow -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 - B \cdot 4 = 0 \Rightarrow B = 4 \text{ N}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow +} = 0 \Rightarrow A - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 2,5 - 2 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow A = 7,5 \text{ N}$$

$$\text{Επαλήθευση : } (\Sigma M)_A^{\leftarrow +} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 1,5 + 7,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 0 !$$

**Διάγραμμα Q**Τμήμα **I** ( $0 \leq x < 1,5$ )

Αν  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε τυχούσα διατομή του τμήματος **I** που απέχει απόσταση  $x$  από το αριστερό άκρο της δοκού, από τα όμοια τρίγωνα προκύπτει:

$$\frac{q_x}{4} = \frac{x}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5}x$$

$$\text{Άρα: } Q_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{4}{1,5} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{1,5}x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_I = 0$$

$$x = 1,5 \Rightarrow Q_A^{\text{ap}} = -3 \text{ N}$$

Τμήμα **II** ( $1,5 < x \leq 2,5$ )

$$Q_{II} = -4 \cdot 1,5/2 + 7,5 = 4,5 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα **III** ( $0 < x < 3$ )

$$Q_{III} = 2x - 4.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{\text{ap}} = -4 \text{ N}$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_D^{\text{δεξ}} = +2 \text{ N.}$$

Είναι  $Q_{III} = 0$ , όταν  $2x - 4 = 0$  ή  $x = 2 \text{ m}$ .

**Παρατήρηση:**

Η τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης 2,5 N, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$ .

**Διάγραμμα M**Τμήμα **I** ( $0 \leq x \leq 1,5$ )

$$M_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{4}{1,5}x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{4,5}x^3$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_I = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm}$$

Τμήμα **II** ( $1,5 \leq x \leq 2,5$ )

$$M_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2}(x-1) + 7,5(x-1,5)$$

$$\text{Για } x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5 \text{ Nm}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_D = +3 \text{ Nm.}$$

Είναι  $M_{II} = 0$ , όταν  $-3x + 3 + 7,5x - 11,25 = 0$  ή  $x = 1,83 \text{ m}$ .

**Σημείωση:**

Ειδικά για το τμήμα αυτό, λόγω γραμμικής μεταβολής της καμπτικής ροπής  $M$ , το σημείο μηδενισμού της μπορεί να βρεθεί και από τα όμοια τρίγωνα του διαγράμματος.

Τμήμα III ( $0 \leq x \leq 3$ ) από δεξ.

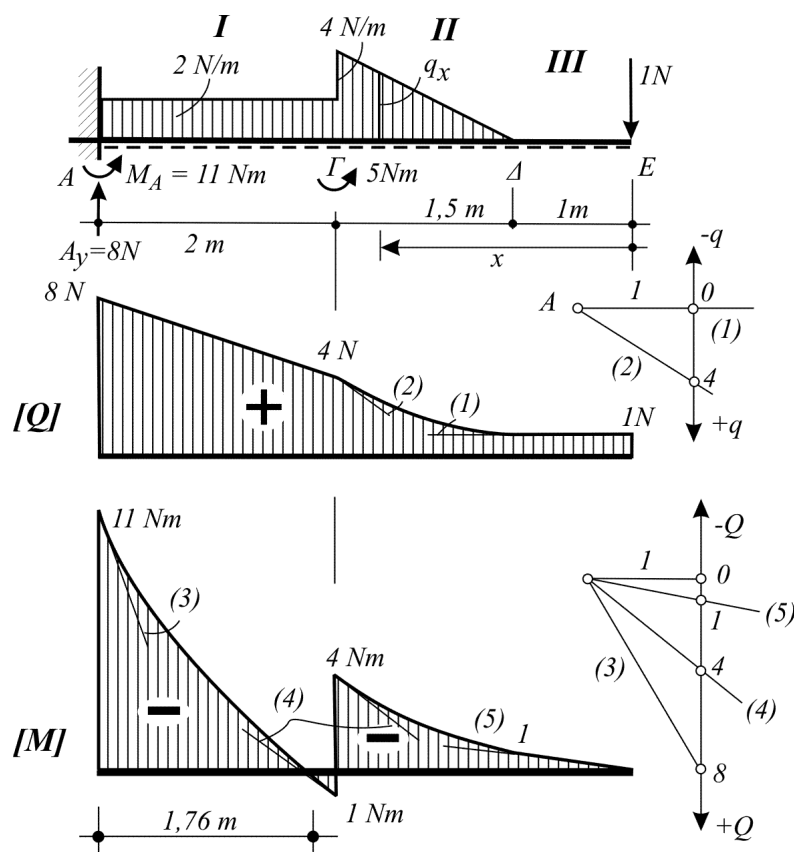
$$M_{III} = 4x - 2x \frac{x}{2} = 4x - x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow M_{\Delta} = +3 \text{ Nm}$$

$$\text{για } x = 2 \text{ m είναι } M_{III \max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 \text{ Nm}$$

- 3** Του **προβόλου** που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων ( $Q$ ) και καμπτικών ροπών ( $M$ ) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.



Διαγράμματα  $Q$  και  $M$  του προβόλου

**Λύση****Αντιδράσεις**

$$(\Sigma M)_A^{\downarrow+} = 0 \Rightarrow -M_A + 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2,5 + 1 \cdot 4,5 - 5 = 0 \Rightarrow M_A = 11 \text{ Nm}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 1 \Rightarrow A = 8 \text{ N}$$

$$\text{Επαλήθευση : } (\Sigma M)_E^{\downarrow+} = -11 + 8 \cdot 4,5 - 2 \cdot 2 \cdot 3,5 - 5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 2 = 0 !$$

**Διάγραμμα Q**

Τμήμα I (  $0 < x \leq 2$  )

$$Q_I = 8 - 2x$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\chi} = 8 \text{ N}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ N}$$

*Τμήμα II (  $1 \leq x \leq 2,5$  ) από δεξ.*

$$\text{Είναι: } \frac{q_x}{4} = \frac{x-1}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5}(x-1)$$

$$\text{Άρα: } Q_{II} = 1 + q_x \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{4}{1,5}(x-1) \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{2}{1,5}(x-1)^2 .$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow Q_{\Delta} = 1 \text{ N}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ N (επαλήθευση της } Q_{\Gamma} \text{ από το Τμήμα I)}$$

*Τμήμα III (  $0 < x \leq 1$  ) από δεξ.*

$$Q_{III} = 1 \text{ N σταθ.}$$

**Διάγραμμα M**

Τμήμα I (  $0 < x < 2$  )

$$M_I = -11 + 8x - 2x \cdot x/2 = -11 + 8x - x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A^{\delta\epsilon\chi} = -11 \text{ Nm,}$$

$$x = 2 \Rightarrow M_{\Gamma}^{ap} = +1 \text{ Nm.}$$

Είναι:  $M_I = 0$ , όταν  $x^2 - 8x + 11 = 0$ . Από τις ρίζες της εξίσωσης,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 11 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4,47}{2} \left\langle \begin{matrix} 6,24 \\ 1,76 \end{matrix} \right.$$

η  $x_1 = 6,24 \text{ m}$  απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του  $x$  στο τμήμα I.

Τμήμα II (  $1 \leq x < 2,5$  ) από δεξ.



$$M_{II} = -1 \cdot x - q_x \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = -x - \frac{4}{1,5}(x-1) \cdot \frac{(x-1)^2}{6} = -x - \frac{2}{4,5}(x-1)^3$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm},$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_{\Gamma^{\delta\epsilon\zeta}} = -4 \text{ Nm}.$$

### Παρατήρηση:

Αντίστοιχα προς την παρατήρηση του παραδείγματος 2, η τιμή της συγκεντρωμένης ροπής στο  $\Gamma$ ,  $M = 5 \text{ Nm}$ , αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της  $(\Sigma M)^{\uparrow+} = 0$ .

Φυσικά, σε κάθε όμοια παρατήρηση, είναι προφανές ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τιμών του διαγράμματος που προέκυψε για τη δεξιά και την αριστερή παρειά της διατομής του άλματος είναι ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου μεγέθους.

Τμήμα IIII ( $0 \leq x \leq 1$ ) από δεξ.

$$M_{IIII} = -1 \cdot x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ Nm}.$$

### Σημείωση:

Η ευθεία του διαγράμματος στο τμήμα IIII, είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (5) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής II (αντίστοιχη παρατήρηση του παραδείγματος 1).

**4**

Της **αμφιπροέχουσας** δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

### **Λύση**

Λόγω έλλειψης οριζόντιας συνιστώσας στην εξωτερική φόρτιση,  $A_x = 0$ .

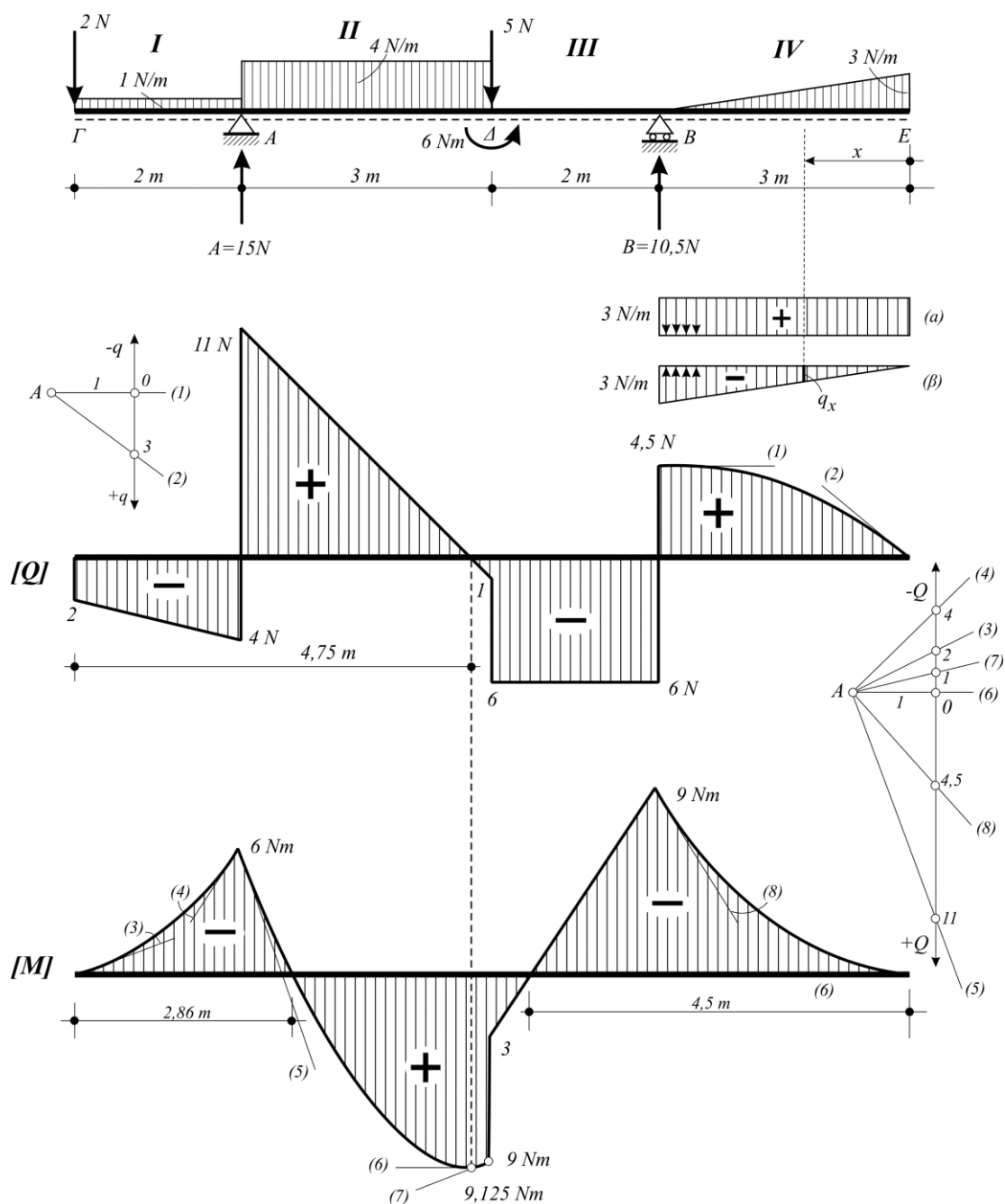
### Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 - 6 - B \cdot 5 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 10,5 N}$$

$$\Sigma \gamma^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 + 10,5 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{A = 15 \text{ N}}.$$

### Επαλήθευση

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{\uparrow+} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 - 10,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 0 !$$



Διαγράμματα  $Q$ ,  $M$  αμφιπροέχουσας δοκού – μετατροπή τριγωνικού φορτίου

### Διάγραμμα $Q$

Τμήμα **I** ( $0 < x < 2$ )

$$Q_I = -2 - 1 \cdot x$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\chi} = -2 \text{ N,}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{A^{\alpha\phi}} = -4 \text{ N.}$$

Τμήμα **II** ( $2 < x < 5$ )

$$Q_{II} = -2 - 1 \cdot 2 + 15 - 4(x - 2) = 11 - 4(x - 2).$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow Q_A^{\text{δεξ}} = 11 \text{ N},$$

$$x = 5 \Rightarrow Q_D^{\text{αρ}} = -1 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0, \text{ για } 11 - 4x + 8 = 0, \text{ ή } x = 4,75 \text{ m}.$$

Τμήμα **III** (  $3 < x < 5$  ) από δεξ.

$$Q_{III} = \frac{3 \cdot 3}{2} - 10,5 = -6 \text{ N σταθ.}$$

Τμήμα **IV** (  $0 \leq x < 3$  ) από δεξ.

Επειδή προτίθεται να λάβω τις δυνάμεις δεξιά της τυχούσας διατομής, όπου η φόρτιση είναι τραπεζοειδής, θεωρώ ότι η δοθείσα τριγωνική φόρτιση του τμήματος είναι συνισταμένη δύο φορτίσεων:

Μιας ομοιόμορφης, έντασης  $3 \text{ N/m}$  με φορά προς τα κάτω, και μιας τριγωνικής, μέγιστης έντασης  $3 \text{ N/m}$  στη διατομή Α, με φορά προς τα πάνω (σχήματα α, β).

Αν τώρα  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής συνιστώσας (σχήμα β) στην τυχαία διατομή που απέχει  $x$  από το Ε, τότε:

$$\frac{q_x}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = x.$$

$$\text{Άρα: } Q_{IV} = 3x - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_B^{\text{δεξ}} = 4,5 \text{ N}.$$

### Διάγραμμα Μ

Τμήμα I (  $0 \leq x \leq 2$  )

$$M_I = -2x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm}.$$

Τμήμα II (  $2 \leq x < 5$  )

$$M_{II} = -2x - 1 \cdot 2(x-1) + 15(x-2) - \frac{4(x-2)^2}{2}$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ Nm},$$

$$x = 5 \Rightarrow M_D^{\text{αρ}} = 9 \text{ Nm}.$$

$$\text{για } x = 4,75 \text{ m, είναι } M_{II \text{ max}} = 9,125 \text{ Nm}.$$

Είναι:  $M_{II} = 0$ , όταν  $-2x - 2x + 2 + 15x - 30 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$ .

ή  $x^2 - 9,5x + 18 = 0$ . Από τις ρίζες της,

$$x_{1,2} = \frac{9,5 \pm \sqrt{90,25 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9,5 \pm 4,27}{2} \begin{cases} 6,89 \\ 2,49 \end{cases},$$

η  $x_1 = 6,89$  m απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του τμήματος.

Τμήμα III ( $3 \leq x < 5$ ) από δεξ.

$$M_{III} = -\frac{3 \cdot 3}{2}(x-1) + 10,5(x-3).$$

Για  $x = 3 \Rightarrow M_B = -9$  Nm,

$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{\delta\epsilon\chi} = 3$  Nm.

Είναι:  $M_{III} = 0$ , όταν  $-4,5x + 4,5 + 10,5x - 31,5 = 0$  ή  $x = 4,5$  m.

Τμήμα IV ( $0 \leq x \leq 3$ ) από δεξ.

Θεωρώντας, όπως και στο διάγραμμα τεμνουσών, επαλληλία των δύο φορτίσεων,

$$M_{IV} = -3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Για  $x = 0 \Rightarrow M_E = 0$ ,

$x = 3 \Rightarrow M_B = -9$  Nm.

**5**

Του **πλαισιωτού** φορέα που εικονίζεται παρακάτω, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις του A και B και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q), καμπτικών ροπών (M) και αξονικών δυνάμεων (N) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

### Λύση

#### Αντιδράσεις

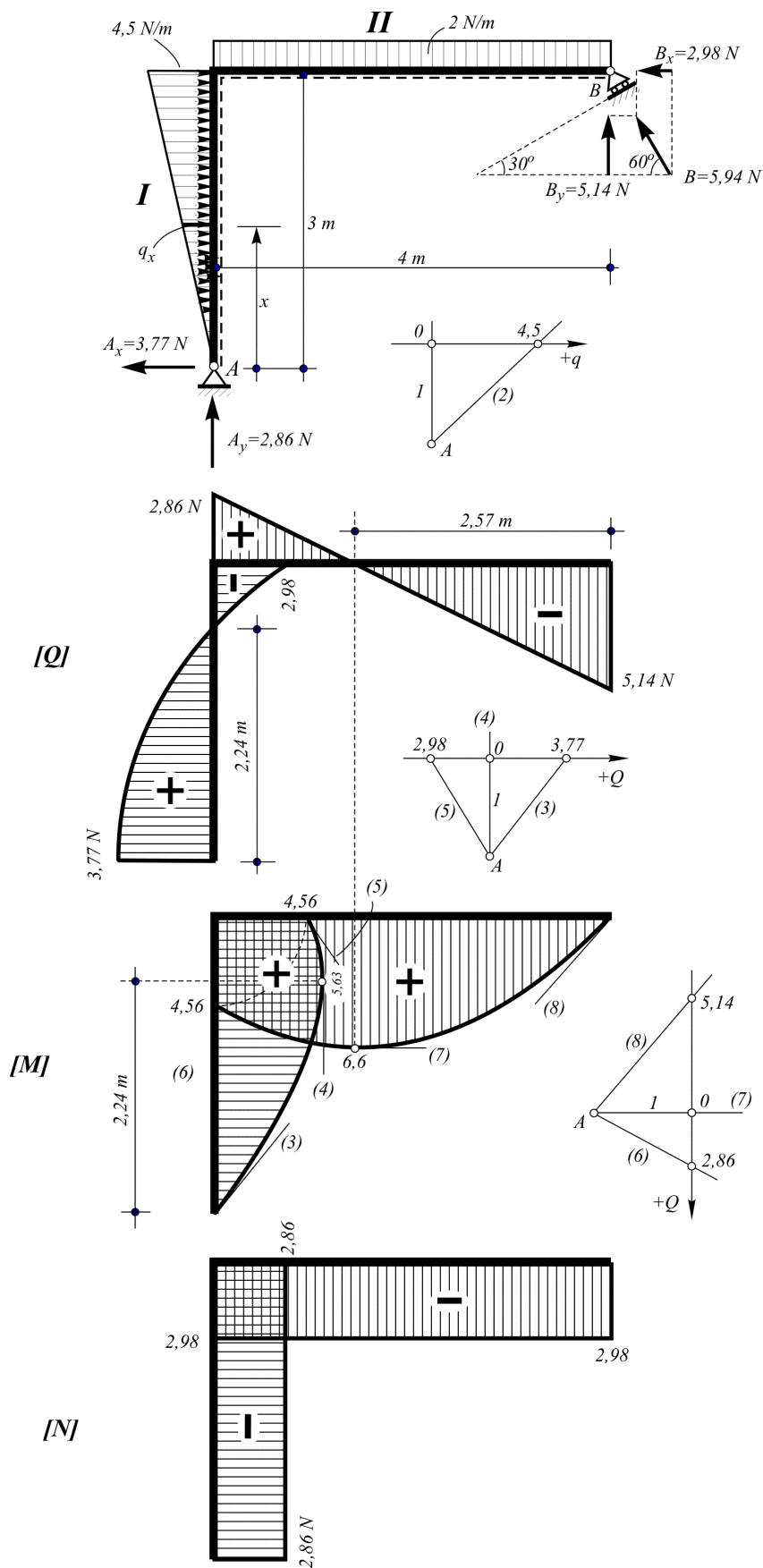
Αν  $B_x$  και  $B_y$  είναι η οριζόντια και κατακόρυφη αντίστοιχα συνιστώσα της B, θα είναι

$$\frac{B_x}{B_y} = \varepsilon\varphi 30^\circ \Rightarrow B_x = 0,58 B_y$$

$$(\Sigma M)_{A^{\perp+}} = 0 \Rightarrow \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - 0,58 B_y \cdot 3 = 0 \Rightarrow \underline{B_y = 5,14 \text{ N}}$$

Άρα:  $\underline{B_x = 2,98 \text{ N}}$

και συνεπώς  $\mathbf{B = 5,94 \text{ N}}$ .



Διαγράμματα  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  αμφιερείστου πλαισίου

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 4 + 5,14 = 0 \Rightarrow A_y = 2,86 \text{ N}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + \frac{4,5 \cdot 3}{2} - 2,98 = 0 \Rightarrow A_x = 3,77 \text{ N}$$

$$\text{Επαλήθευση : } (\Sigma M)_{\Gamma^{\uparrow+}} = 3,77 \cdot 3 - \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5,14 \cdot 4 = 0!$$

### Διάγραμμα Q

#### Τμήμα I ( $0 < x < 3$ )

Αν  $q_x$  είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε διατομή που απέχει απόσταση  $x$  από το Α, θα είναι:

$$\frac{q_x}{4,5} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = 1,5x .$$

$$\text{Άρα: } Q_I = 3,77 - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3,77 - \frac{1,5x^2}{2} .$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\chi} = 3,77 \text{ N},$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{ap} = -2,98 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_I = 0 \text{ για } x^2 = 3,77 \cdot 2 / 1,5 \text{ ή } x = \pm 2,24 \text{ m}.$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται επειδή είναι έξω από τα όρια του τμήματος.

#### Τμήμα II ( $0 < x < 4$ ) από δεξ.

$$Q_{II} = -5,14 + 2x .$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -5,14 \text{ N},$$

$$x = 4 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\chi} = 2,86 \text{ N}.$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0 \text{ όταν } 2x = 5,14 \text{ ή } x = 2,57 \text{ m}.$$

### Διάγραμμα M

Διαλέγω ως θετικό όριο (κάτω ίνα) του φορέα την εσωτερική πλευρά του πλαισίου, ώστε η ροπή στο Γ, που προέρχεται είτε από το οριζόντιο είτε από το κατακόρυφο σκέλος, να έχει, εκτός από την ίδια τιμή και το ίδιο πρόσημο. Με τον τρόπο αυτό διατηρείται ομοιομορφία και στη σήμανση των διαγραμμάτων (Q) και (N).

#### Τμήμα I ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$M_I = 3,77x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 3,77x - \frac{x^3}{4} .$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_{\Gamma} = 4,56 \text{ Nm}.$$

Για  $x = 2,24 \text{ m}$ , είναι  $M_{I \max} = 5,63 \text{ Nm}$ .

Τμήμα II ( $0 \leq x \leq 4$ ) από δεξ.

$$M_{II} = 5,14x - 2x \cdot \frac{x}{2} = 5,14x - x^2.$$

Για  $x = 2 \Rightarrow M_B = 0$ ,

$x = 4 \Rightarrow M_F = 4,56 \text{ Nm}$ .

Για  $x = 2,57 \text{ m}$ , είναι  $M_{II \max} = 6,6 \text{ Nm}$ .

### Διάγραμμα N

Εδώ ο χωρισμός του φορέα σε τμήματα, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με μοναδικό κριτήριο την ύπαρξη συγκεντρωμένων δυνάμεων που δρουν αξονικά στο φορέα, δηλαδή δυνάμεων που είναι παράλληλες στον άξονά του.

Σπανιότατα είναι δυνατόν να εμφανιστεί συνεχές φορτίο που να δρα κατά την έννοια του άξονα του φορέα, οπότε η περίπτωση του αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Με το παραπάνω σκεπτικό, ο χωρισμός του φορέα στα τμήματα I και II που έγινε για τα διαγράμματα (Q) και (M), ισχύει και για το διάγραμμα (N).

Τμήμα I ( $0 < x < 3$ )

$N_I = -A_y = -2,86 \text{ N}$  σταθ.

Τμήμα II ( $0 < x < 4$ ) από δεξ.

$N_{II} = -B_x = -2,98 \text{ N}$  σταθ.

## 2.8 - Η δοκός Gerber

Η συνεχής δοκός με αρθρώσεις, ή όπως αλλιώς αναφέρεται, σαν δοκός **Gerber**, είναι μια κανονική συνεχής δοκός που έχει  $v$  ανοίγματα,  $v+1$  στηρίξεις εκ των οποίων μία άρθρωση ενώ οι υπόλοιπες κυλίσεις, και  $v-1$  αρθρώσεις. Οι τελευταίες όμως, τοποθετούνται κατάλληλα πάνω στη δοκό, έτσι ώστε, αυτή να γίνεται ισοστατική. Η τοποθέτησή τους γίνεται:

- **Μία σε κάθε άνοιγμα**, εκτός από ένα (οποιοδήποτε)
- **Δύο μαζί** στο ίδιο άνοιγμα και καθόλου στα διπλανά του
- Απαγορεύεται να υπάρχουν πάνω από 2 αρθρώσεις στο ίδιο άνοιγμα.
- Απαγορεύεται να είναι 2 αρθρώσεις στα δύο εξωτερικά ανοίγματα.

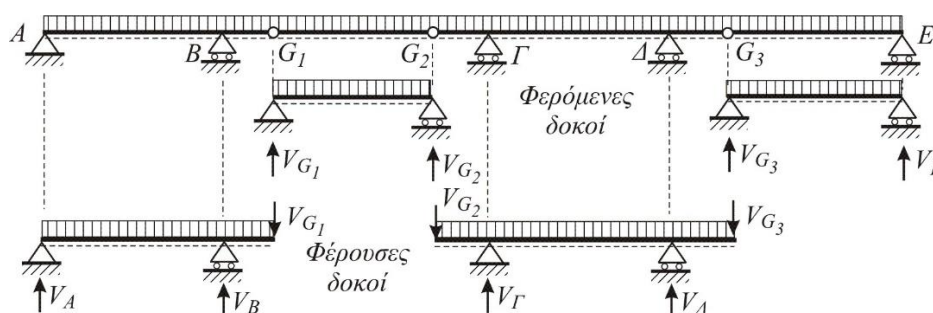
Είναι σημαντικό, πριν ασχοληθούμε με τον υπολογισμό αντιδράσεων, εσωτερικών δυνάμεων ή διαγραμμάτων, να εξετάσουμε την **ισοστατικότητα** και τη **στερεότητα** της δοκού.

Για την **ισοστατικότητα** ελέγχεται αν ο αριθμός  $v$  των δίσκων που συνδέονται τόσο μεταξύ τους όσο και με το έδαφος, καθώς και ο αριθμός των ράβδων  $\rho$  που προκύπτουν από αυτές τις συνδέσεις (2 για άρθρωση, 1 για κύλιση), ικανοποιεί τη σχέση:  $\rho = 3v$ .

Είναι γεγονός ότι με την προσθήκη μιας άρθρωσης σε ένα φορέα, ο βαθμός της στατικής αοριστίας του μειώνεται κατά 1. Αυτό συμβαίνει επειδή, μία επί πλέον άρθρωση αυξάνει τον αριθμό των δίσκων κατά μονάδα, ενώ τον αριθμό των ράβδων σύνδεσης κατά 2. Συνεπώς το σύστημα της δοκού, για την εξασφάλιση της ισοστατικότητας, θα πρέπει να **‘δανειστεί’** μια από τις ράβδους που είναι υπεράριθμες, μειώνοντας έτσι το βαθμό στατικής αοριστίας κατά 1.

Για τη **στερεότητα** ελέγχεται αν υπάρχει π.χ. δίσκος που να στηρίζεται στερεά και ισοστατικά με το έδαφος -αποτελώντας έτσι το βασικό δίσκο του φορέα- και στη συνέχεια αν αυτός συνδέεται π.χ. με τριαρθρωτό φορέα του οποίου οι 3 αρθρώσεις δεν κείνται επ’ ευθείας. Σημειώνεται ότι δύο κυλίσεις ακραίου ανοίγματος σχηματίζουν υποθετική άρθρωση στο επ’ άπειρον σημείο.

Το βασικό γνώρισμα που προσδίδουν οι αρθρώσεις σε μια δοκό Gerber, και ως εκ τούτου την κάνουν **ισοστατική**, είναι ότι δημιουργούν, -ως τμήματά της-, **δύο σύνολα** δοκών: τις **φέρουσες** που συνήθως είναι μονοπροέχουσες ή αμφιπροέχουσες δοκοί και τις **φερόμενες** που είναι συνήθως αμφιέρειστες.

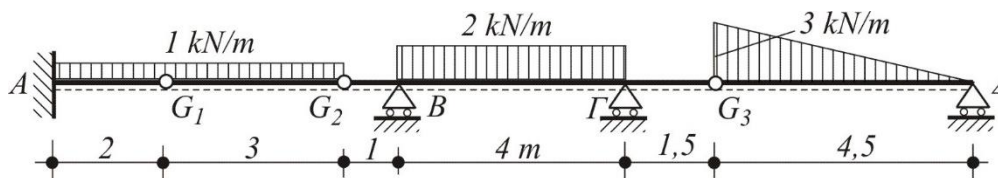


Έτσι γίνεται πολύ απλός ο προσδιορισμός **όλων** των αντιδράσεων, αρκεί πρώτα να γίνει αυτή η στατική ανάλυση, που είναι σχεδόν προφανής. Έτσι, αν ξεκινήσουμε από τις αμφιέρειστες, άρα **φερόμενες** δοκούς, προσδιορίζοντας εύκολα τις αντιδράσεις τους, μπορούμε να **συνεχίσουμε** με τις υπόλοιπες, τις **φέρουσες**, αφού όμως θέσουμε πάνω σ' αυτές, πέρα από τη φόρτίσή τους, σαν **δράσεις** τις **αντίθετες αντιδράσεις** που βρήκαμε πριν από τις φερόμενες.

### Παράδειγμα

Της δοκού Gerber του σχήματος με τα εικονιζόμενα φορτία, αφού αποδειχθεί η ισοστατικότητα και η στερεότητά της, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.





### Λύση

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των επί μέρους δίσκων από τους οποίους αποτελείται ο σύνθετος φορέας είναι  $v = 4$ . Οι δίσκοι αυτοί συνδέονται μεταξύ τους και με το έδαφος με 1 πάκτωση, 3 αρθρώσεις και 3 κυλίσεις, δηλαδή συνολικό αριθμό ράβδων  $\rho = 3 + 3 \cdot 2 + 3 = 12$ , και συνεπώς καλύπτεται η συνθήκη ισοστατικότητας  $\rho = 3v$ .

Σε ότι αφορά τη στερεότητα του φορέα, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας δίσκος, η δοκός  $AG_1$ , η οποία, ως πρόβολος, στηρίζεται ισοστατικά και στερεά στο έδαφος, αποτελώντας το βασικό δίσκο του φορέα. Επειδή οι κυλίσεις Β και Γ δημιουργούν μια υποθετική άρθρωση στο επ' άπειρον σημείο κατακόρυφης ευθείας, οι δύο δοκοί  $G_1G_2$  και  $G_2G_3$  αποτελούν ένα **στερεό τριαρθρωτό τόξο**, καθώς συνδέονται μεταξύ τους με την άρθρωση  $G_2$ , με τη βασική δοκό μέσω της άρθρωσης  $G_1$ , ενώ με το έδαφος μέσω της υποθετικής άρθρωσης του επ' άπειρον σημείου της κατακόρυφης ευθείας, οι τρεις δε αυτές αρθρώσεις **δεν κείνται επ' ευθείας**. Τέλος, η αμφιέριστη δοκός  $G_3\Delta$  στηρίζεται με άρθρωση στο σταθερό σημείο του τριαρθρωτού τόξου και με κύλιση στο  $\Delta$ .

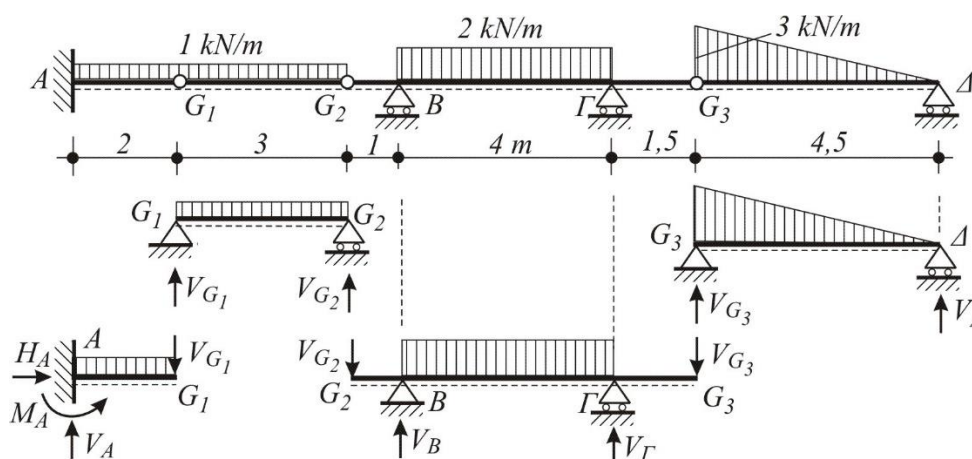
### Αντιδράσεις

Ξεκινάμε από τις αμφιέριστες  $G_1G_2$  και  $G_3\Delta$ :

$$V_{G1} = V_{G2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5 \text{ kN}.$$

$$(\Sigma M)_{G3}^{\cup+} = 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot 4,5}{2} 1,5 - V_{\Delta} \cdot 4,5 = 0 \Rightarrow V_{\Delta} = 2,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_{G3} - \frac{3 \cdot 4,5}{2} + 2,25 = 0 \Rightarrow V_{G3} = 4,5 \text{ kN}.$$



Συνεχίζουμε με τον πρόβολο **AG<sub>1</sub>** και την αμφιπροέχουσα **G<sub>2</sub>BΓG<sub>3</sub>**:

$$(\Sigma M)_A^{\cup+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -M_A + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1,5 \cdot 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_A = 5 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_y^{\uparrow+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A - 1 \cdot 2 - 1,5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A = 3,5 \text{ kN}.$$

$$\Sigma F_x^{\rightarrow+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_A = 0.$$

$$(\Sigma M)_B^{\cup+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - V_\Gamma \cdot 4 + 4,5 \cdot 5,5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_\Gamma = 9,81 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_y^{\uparrow+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_B - 1,5 - 2 \cdot 4 + 9,81 - 4,5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_B = 4,19 \text{ kN}.$$

### Τέμνουσες δυνάμεις σε χαρακτηριστικές διατομές

$$Q_A^{\delta\epsilon\xi} = V_A = 3,5 \text{ kN}$$

$$Q_{G2} = 3,5 - 1 \cdot 5 = -1,5 = Q_B^{\alpha\rho}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi} = -1,5 + V_B = -1,5 + 4,19 = 2,69 \text{ kN}$$

$$\text{Σημείο μηδενισμού: } 2,69 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,35 \text{ m}$$

$$Q_\Gamma^{\alpha\rho} = 2,69 - 2 \cdot 4 = -5,31 \text{ kN}$$

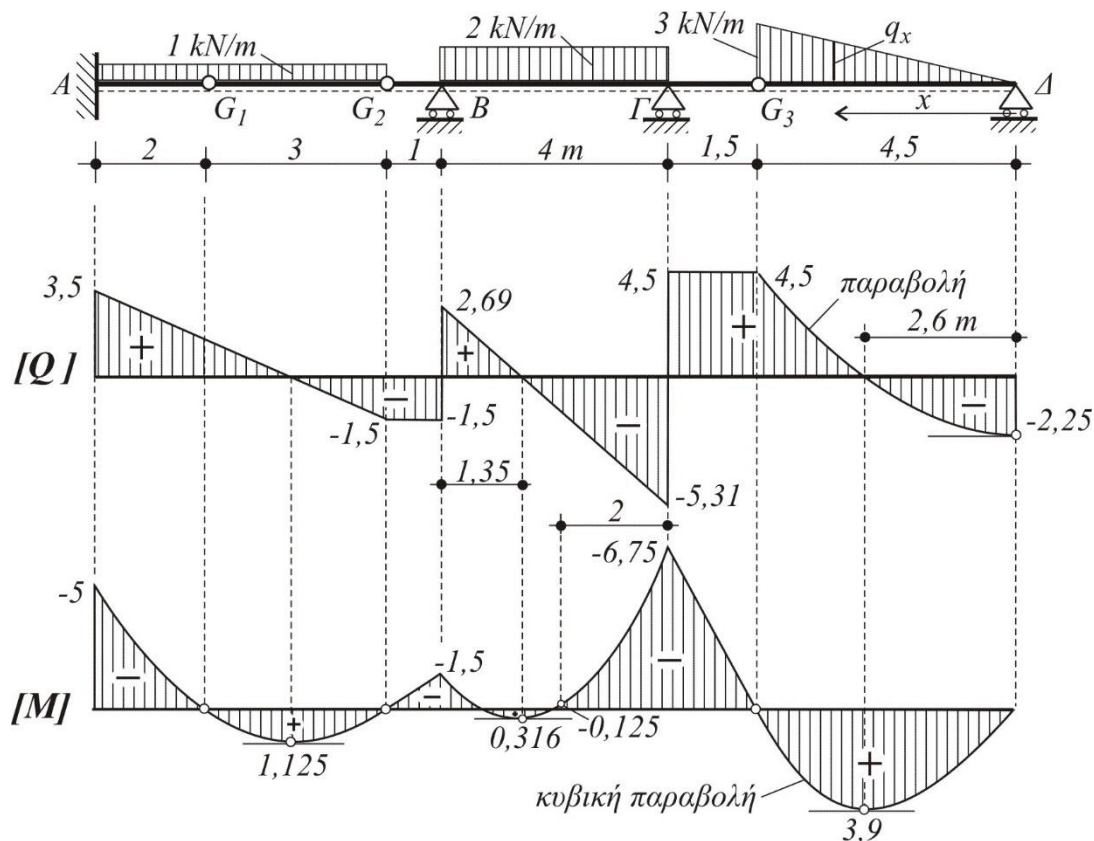
$$Q_\Gamma^{\delta\epsilon\xi} = -5,31 + 9,81 = 4,5 \text{ kN} = Q_{G3}$$

$$Q_\Delta^{\alpha\rho} = 4,5 - \frac{3 \cdot 4,5}{2} = -2,25 \text{ kN}$$

Σημείο μηδενισμού τέμνουσας τελευταίου ανοίγματος: Είναι:

$$\frac{q_x}{x} = \frac{3}{4,5} \quad \Leftrightarrow \quad q_x = \frac{x}{1,5}$$

$$Q_x = \frac{q_x \cdot x}{2} - V_\Delta = \frac{x^2}{3} - 2,25 \quad \text{Είναι: } Q_x = 0 \quad \text{για } x^2 = 6,75 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,6 \text{ m}$$



### Καμπτικές ροπές σε χαρακτηριστικές διατομές

$$M_A^{\delta\epsilon\xi} = -5 \text{ kNm}$$

$$M_{G1} = -5 + 3,5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0 !$$

$$M_{G2} = -5 + 3,5 \cdot 5 - 1 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 !$$

$$M_B = -5 + 3,5 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 3,5 = -1,5 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma} = 2,25 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 4,5}{2} \left( 1,5 + \frac{4,5}{3} \right) = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_{G3} = 2,25 \cdot 4,5 - \frac{3 \cdot 4,5}{2} \cdot \frac{4,5}{3} = 0 !$$

$$M_{G1,G2}^{max} = \frac{1 \cdot 3^2}{8} = 1,125 \text{ kNm}$$

$$M_{B\Gamma}^{max} = -1,5 + \frac{2,69 \cdot 1,35}{2} = 0,316 \text{ kNm}$$

$$M_{B\Gamma} = \frac{-1,5 - 6,75}{2} + \frac{2 \cdot 4^2}{8} = -0,125 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma\Delta}^{max} = 2,25 \cdot 2,6 - \frac{2,6^2}{2 \cdot 1,5} \cdot \frac{2,6}{3} = 3,9 \text{ kNm}$$

Κάποιες περαιτέρω σχεδιαστικές λεπτομέρειες, που αφορούν στην κατασκευή των επαπτομένων, τόσο στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων όσο και σ' εκείνο των καμπτικών ροπών, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην

άσκηση 4 και όχι μόνο, των παραδειγμάτων πάνω στα διαγράμματα Q και M των ισοστατικών φορέων.

## 2.9 – Γενικές παρατηρήσεις

1. Στο διάγραμμα (M), όταν από **αφόρτιστη** περιοχή του φορέα μεταβαίνουμε σε **συνεχώς** φορτισμένη χωρίς την παρεμβολή συγκεντρωμένου φορτίου, τότε η ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στην αφόρτιστη περιοχή, είναι μαζί και εφαπτομένη του καμπύλου τμήματος που αντιστοιχεί στο φορτισμένο τμήμα του φορέα (δείτε διάγραμμα M<sub>II-III</sub> των παραδειγμάτων 1 και 3)

2. Η ύπαρξη συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης σε ακραία ή ενδιάμεση θέση συνεχούς φορτίου, αν και δε διασπά την τιμή της καμπτικής ροπής στη θέση της δύναμης, δημιουργεί στο διάγραμμα γωνία υπό μορφή ακίδος, που οφείλεται στις δύο εφαπτόμενες εκατέρωθεν της διατομής όπου δρα η δύναμη.

3. Στο διάγραμμα (Q), όταν από τριγωνική φόρτιση μεταβαίνουμε σε αφόρτιστο τμήμα του φορέα που συνορεύει με την κορυφή του τριγωνικού φορτίου **χωρίς** τη μεσολάβηση κατακόρυφης δύναμης, τότε η οριζόντια ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στο αφόρτιστο τμήμα είναι μαζί και εφαπτομένη του παραβολικού τμήματος της φορτισμένης περιοχής (δείτε διάγραμμα Q<sub>II-III</sub> του παραδείγματος 3).

4. Όταν στο όριο μεταξύ δύο τμημάτων δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, τότε η τιμή της Q ή M αντίστοιχα που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων στα γειτονικά τμήματα είναι πάντα η ίδια (επαλήθευση).

## 2.10 – Δυσμενείς φορτίσεις

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο, ο φορέας πρέπει να μελετηθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να μπορεί να αναλάβει τα προβλεπόμενα φορτία σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους, ειδικά εκείνους που προκαλούν δυσμενέστερες καταπονήσεις.

Τα φορτία που κατά πάγια τακτική αναλαμβάνει ένας φορέας είναι:

1. Το δικό του (ίδιο) βάρος που θεωρείται μόνιμο φορτίο (g)
2. Το ωφέλιμο ή κινητό φορτίο (p) και
3. Το φορτίο χιονιού (s).

Η σύγχρονη δράση των παραπάνω φορτίων που ονομάζονται **κύρια**, συνιστούν τη λεγόμενη φόρτιση (H) του φορέα.

Πέρα όμως από τα κύρια φορτία, ένας φορέας μπορεί να αναλαμβάνει και **πρόσθετα φορτία**, δηλαδή φορτία που προέρχονται από:

1. Ανεμοπίεση ( $w$ )
2. Μεταβολή της θερμοκρασίας και
3. Δυνάμεις πεδήσεως (φρένων).

Η σύγχρονη δράση των κύριων και πρόσθετων φορτίων, συνιστούν την ονομαζόμενη φόρτιση ( $HZ$ ).

Τα κτιριακά έργα επιβαρύνονται συνήθως με φόρτιση  $H$ , ενώ οι γέφυρες με  $HZ$ .

Στη μελέτη ενός φορέα, τα φορτία που συνδυάζονται μεταξύ τους για να δώσουν τις δυσμενέστερες καταπονήσεις, είναι:

α) Τα μόνιμα φορτία ( $g$ ), που δεν μεταβάλλονται και συνεπώς προκαλούν φόρτιση του φορέα σε όλο το μήκος του και

β) Τα κινητά ή ωφέλιμα φορτία ( $p$ ), που μπορούν να κινούνται κατά μήκος του φορέα και συνεπώς να τον επιβαρύνουν διαφορετικά, ανάλογα με τη θέση που έχουν την κάθε φορά.

Όταν ο φορέας φορτίζεται σε **όλο** του το μήκος, με φορτίο  $q = g + p$ , θα λέμε ότι υφίσταται **καθολική φόρτιση**. Όταν όμως ένα τμήμα του φορτίζεται με  $q$  ενώ το υπόλοιπο με  $g$ , η φόρτιση ονομάζεται **μερική**, και μπορεί να αποτελέσει μια περίπτωση δυσμενούς φορτίσεως.

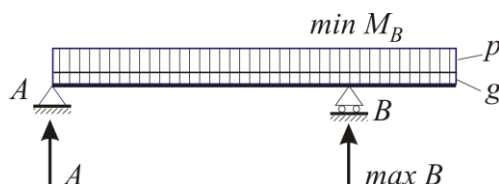
Στην **αμφιέρεστη** δοκό οι μέγιστες αντιδράσεις στήριξης και οι μέγιστες καμπτικές ροπές προκύπτουν για καθολική φόρτιση  $q$ .

Στη **μονοπροέχουσα** δοκό, επειδή η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση στην ακραία στήριξη αλλά και την καμπτική ροπή στο άνοιγμα, οι μέγιστες τιμές υπολογίζονται για μερική φόρτιση στο τμήμα του προβόλου.

Ανάλογα με τη θέση που έχει το ομοιόμορφο κινητό φορτίο πάνω στη μονοπροέχουσα δοκό, προκύπτουν οι παρακάτω 3 περιπτώσεις φορτίσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στα 3 επόμενα σχήματα, σε καθένα από τα οποία παρουσιάζεται η ακρότατη τιμή του στατικού φορτίου:

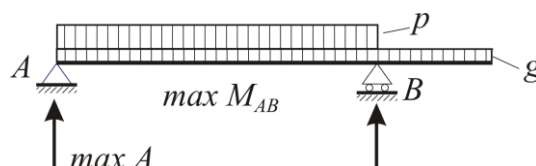
- 1) Καθολική φόρτιση:

Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εσωτερικής στήριξης ( $\max B$ ) και την ελάχιστη (απόλυτα μέγιστη) αρνητική ροπή στη στήριξη του προβόλου ( $\min M_B$ ).



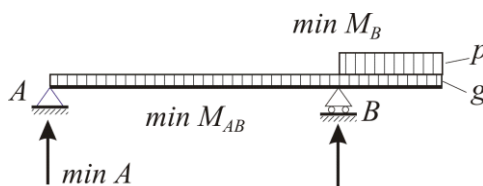
### 2) Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα:

Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ( $\max A$ ) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ( $\max M_{AB}$ ).



### 3) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο:

Προκαλεί την ελάχιστη ροπή στο άνοιγμα ( $\min M_{AB}$ ) και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ( $\min A$ ). Αν η αντίδραση προκύψει αρνητική, τότε πρέπει η δοκός να αγκυρώνεται στη στήριξη.



Στην αμφιπροέχουσα δοκό, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των αντιδράσεων και ροπών δεν προκύπτουν για καθολική φόρτιση όπως στην αμφιέρειστη αλλά για μερική φόρτιση της δοκού από τα κινητά φορτία.

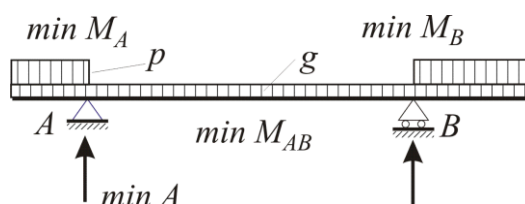
Όμως επειδή υπάρχουν δύο πρόβολοι, οι περιπτώσεις φόρτισης που μπορούν να συνδυαστούν είναι 6 και παρουσιάζονται αντίστοιχα στα επόμενα 6 σχήματα.

Σημειώνεται ότι στη μονοπροέχουσα ήταν μόνο τρεις.

Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

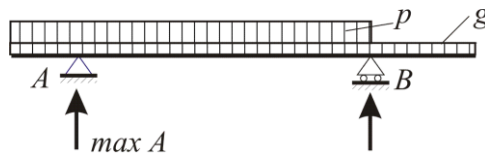
#### 1) Φόρτιση δύο προβόλων:

Προκύπτει:  $\min M_A$ ,  $\min M_B$ ,  $\min M_{AB}$ .



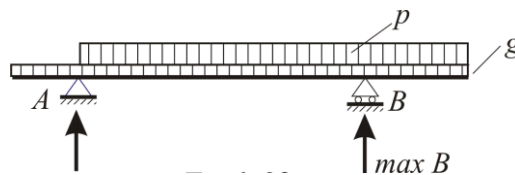
2) Φόρτιση ανοίγματος και αριστερού προβόλου:

Προκύπτει η  $\max A$ .



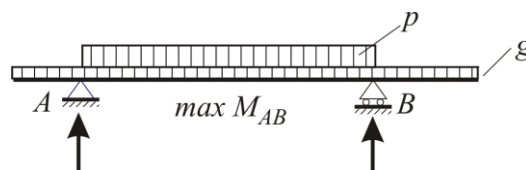
3) Φόρτιση ανοίγματος και δεξιού προβόλου :

Προκύπτει η  $\max B$ .



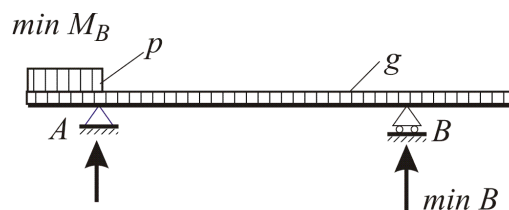
4) Φόρτιση μόνο ανοίγματος:

Προκύπτει η  $\max M_{AB}$ .



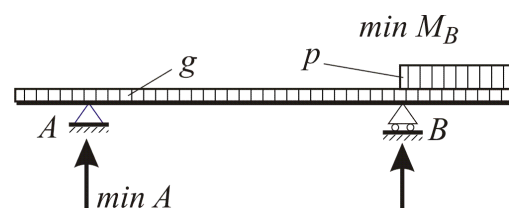
5) Φόρτιση μόνο αριστερού προβόλου:

Προκύπτει  $\min M_A$  και  $\min B$ .



6) Φόρτιση μόνο δεξιού προβόλου:

Προκύπτει  $\min M_B$  και  $\min A$ .







### Υπερστατικοί φορείς

Όπως αναπτύχθηκε στο τέλος της ενότητας 2.1, οι περισσότεροι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι. Ως εκ τούτου, θεωρούμε ότι ένας φορέας είναι **ισοστατικός**, όταν το πλήθος,  $\alpha$ , των αντιδράσεών του δεν ξεπερνά τον αριθμό **3**, που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας του,

$$(\Sigma M)_A^{\circ+} = 0, \quad \Sigma F_x^{\rightarrow+} = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma F_y^{\uparrow+} = 0.$$

Στην αντίθετη, όμως, περίπτωση, δηλαδή όταν  $\alpha > 3$ , τότε ο φορέας ονομάζεται **υπερστατικός** με **βαθμό στατικής αοριστίας** τον αριθμό  $\nu = \alpha - 3$ .

Έτσι προκύπτει η ανάγκη να συνταχθούν και άλλες εξισώσεις, οι οποίες, συνήθως διαμορφώνονται από την Αντοχή των Υλικών, '**συμβιβάζοντας**' τις παραμορφώσεις που προκαλούνται από τη συγκεκριμένη φόρτιση.

Γενικά, ένας υπερστατικός φορέας, που φορτίζεται με την ίδια ακριβώς φόρτιση με έναν ισοστατικό, παρουσιάζει στα ανοίγματα **μικρότερες** καμπτικές ροπές από τις αντίστοιχες ενός ισοστατικού, εμφανίζοντας όμως ροπές και στις στηρίξεις του.

Για τις συνήθεις κατασκευές μας, επιδιώκουμε, λόγω οικονομίας και λειτουργικότητας, να εξασφαλίσουμε μικρές διατομές. Επειδή όμως αυτές είναι συνάρτηση και των καμπτικών ροπών που αναπτύσσονται στα ανοίγματα, υιοθετούμε τελικά τη χρήση υπερστατικών φορέων.

Ωστόσο, υπάρχουν κατασκευές όπου η χρήση ισοστατικών φορέων είναι επιβεβλημένη. Αυτές είναι κυρίως οι γέφυρες, για δύο λόγους:

1. Είναι κατασκευές μεγάλης επικινδυνότητας, όπου οι διαφορικές καθιζήσεις των μεσοβάθρων μπορεί να προκαλέσουν αυτεντατική κατάσταση, επιβαρύνοντας τις ήδη υπάρχουσες ροπές και
2. Για στρατιωτικούς σκοπούς, όπου, ανατινάζοντας στο κέντρο του ανοίγματος τον αμφιέρειστο φορέα της γέφυρας σε μια υποχώρηση του στρατού, είναι σίγουρο ότι η γέφυρα θα καταστραφεί, εμποδίζοντας έτσι την προέλαση του εχθρού.

Η μεθοδολογία που αναπτύσσεται στην επίλυση των υπερστατικών φορέων δεν είναι απλή και καλύπτει τουλάχιστον τη διδακτέα ύλη ενός εξαμήνου. Όμως, για την οικονομία στην ύλη του μαθήματος, θα περιοριστούμε μόνο σε μια σύντομη παρουσίαση:

- της μεθόδου των **παραμορφώσεων**
- της μεθόδου **Cross**
- της εξίσωσης των τριών ροπών (**Clapeyron**) και
- της μεθόδου των **δυνάμεων**.

### 3.1 – Η μέθοδος των Παραμορφώσεων

Σε έναν υπερστατικό φορέα, ο προσδιορισμός των καμπτικών ροπών στους κόμβους του, είναι δυνατόν να γίνει με την επαλληλία τριών δράσεων:

1. Από τη δράση των **εξωτερικών φορτίων** του φορέα, **p**,
2. Από τη δράση λόγω **στροφών** των **εσωτερικών** του **κόμβων**, **φ**, και
3. Από τη δράση των **μετακινήσεων**, **δ**, στους κόμβους του.

Συνεπώς, αθροιστικά, θα είναι:  $M_{ολ} = M_p + M_\varphi + M_\delta$

Βέβαια, για την εφαρμογή των παραπάνω δράσεων, γίνονται και κάποιες παραδοχές, οι οποίες διευκολύνουν σημαντικά τη διαδικασία.

Τέτοιες **παραδοχές**, είναι:

1. Η αξονική **ατένεια** των ράβδων. Αυτό σημαίνει ότι οι ράβδοι δεν παραμορφώνονται αξονικά, δηλαδή οι επιμηκύνσεις ή οι επιβραχύνσεις τους θεωρούνται μηδενικές. Άμεση συνέπεια της παραδοχής αυτής, είναι:
  - i) Όταν μία ράβδος στηρίζεται στο έδαφος, οι μετακινήσεις των κόμβων της, κατά την αξονική διεύθυνση, είναι **0**.
  - ii) Αν η ράβδος δεν στηρίζεται στο έδαφος, τότε οι μετακινήσεις των ακραίων της κόμβων, κατά την αξονική διεύθυνση είναι **ίδιες**.
  - iii) Όταν ένας κόμβος αποτελεί σημείο τομής δύο ράβδων, οι οποίες στηρίζονται στο έδαφος με άρθρωση ή πάκτωση, τότε η μετακίνηση του κόμβου είναι **0**.
2. Οι ράβδοι που συντρέχουν σε έναν κόμβο που στρέφεται κατά γωνία  $\varphi$ , στρέφονται όλες κατά την ίδια γωνία,  $\varphi$ , δηλαδή **διατηρούν την αρχική μεταξύ τους γωνία**.

Οι υπερστατικοί φορείς διακρίνονται σε **πάγιους** και **μη πάγιους**.

- **Πάγιος** είναι ένας φορέας του οποίου **οι κόμβοι μένουν αμετακίνητοι**, αλλά **στρέφονται**.

Συνεπώς, θα είναι:  $M_{ολ} = M_p + M_\varphi$

- **Μη πάγιος** είναι ένας φορέας του οποίου **οι κόμβοι όχι μόνο στρέφονται αλλά και μετατοπίζονται**.

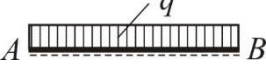
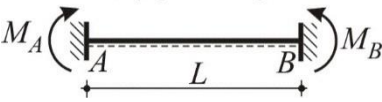
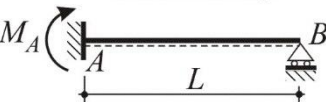
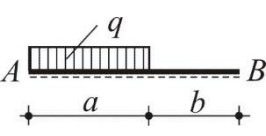
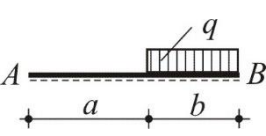
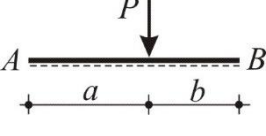
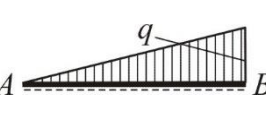
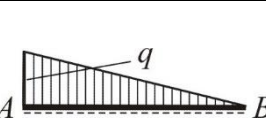
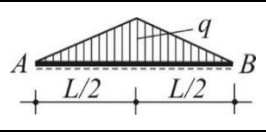
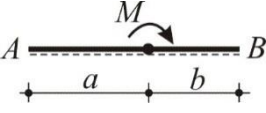
Συνεπώς, τότε θα είναι:  $M_{ολ} = M_p + M_\varphi + M_\delta$

Η πορεία που ακολουθείται γενικά για τον υπολογισμό ενός υπερστατικού φορέα περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Σταθεροποιώ, δηλαδή παγιώνω τους εσωτερικούς κόμβους του φορέα, έτσι ώστε όλα τα μέλη από τα οποία αποτελείται, να είναι μονόπακτοι ή αμφίπακτοι δοκοί.

**Βήμα 2°:** Στις παρειές κάθε κόμβου, υπολογίζω τις ροπές λόγω εξωτερικής φόρτισης,  $M_p$ , κάνοντας χρήση του Πίνακα 1, που ακολουθεί.

**Πίν. 1. Ροπές πάκτωσης αμφίπακτης & μονόπακτης δοκού λόγω  $q$ ,  $P$ ,  $M$**

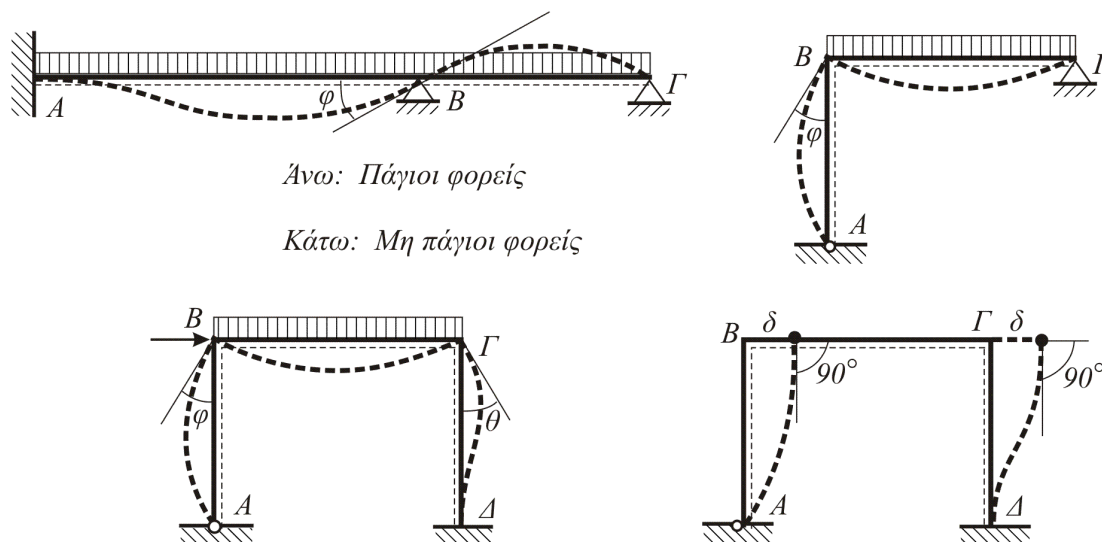
<u>Φόρτιση</u>	<u>Αμφίπακτη</u>	<u>Μονόπακτη</u>
	 $M_A = M_B = -\frac{qL^2}{12}$	 $M_A = -\frac{qL^2}{8}$
	$M_A = -\frac{q \cdot a^2}{4} \left[ 2 - \frac{a}{L} \left( \frac{8}{3} - \frac{a}{L} \right) \right]$ $M_B = -\frac{q \cdot a^3}{12L^2} (4L - 3a)$	$M_A = -\frac{q \cdot a^2}{8} \left( 2 - \frac{a}{L} \right)^2$
	$M_A = -\frac{q \cdot b^3}{12L^2} (4L - 3b)$ $M_B = -\frac{q \cdot b^2}{4} \left[ 2 - \frac{b}{L} \left( \frac{8}{3} - \frac{b}{L} \right) \right]$	$M_A = -\frac{q \cdot b^2}{8} \left( 2 - \frac{b^2}{L^2} \right)$
	$M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{P \cdot b \cdot a^2}{L^2}$	$M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2L^2} (L + b)$
	$M_A = -\frac{q \cdot L^2}{30}$ $M_B = -\frac{q \cdot L^2}{20}$	$M_A = -\frac{7q \cdot L^2}{120}$
	$M_A = -\frac{q \cdot L^2}{20}$ $M_B = -\frac{q \cdot L^2}{30}$	$M_A = -\frac{q \cdot L^2}{15}$
	$M_A = M_B = -\frac{5}{96} q \cdot L^2$	$M_A = -\frac{5}{64} q \cdot L^2$
	$M_A = -M \frac{a}{L} \left( 4 - 3 \frac{a}{L} - \frac{L}{a} \right)$ $M_B = -M \frac{a}{L} \left( 3 \frac{a}{L} - 2 \right)$	$M_A = -M \frac{a}{L} \left( 3 - 1,5 \frac{a}{L} - \frac{L}{a} \right)$

**Βήμα 3°:** Ανάλογα με το πλήθος των κόμβων που έχουν δυνατότητα **στροφής** σε **πάγιο** φορέα, ή **επί πλέον**, και εκείνων που μπορούν να **μετακινούνται παράλληλα** σε **μη πάγιο** φορέα, κατασκευάζω κατά περίπτωση, το ένα ή και τα δύο **σκαριφήματα** που εκφράζουν την **παραμόρφωση** του φορέα, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρείται η **λογική του συνέχεια**. Αυτό σημαίνει ότι, **στρέφοντας π.χ., έναν κόμβο** κατά γωνία  $\varphi$ , αυτός, **όχι μόνο στρέφει** τις συντρέχουσες στον κόμβο ράβδους **κατά την ίδια γωνία,  $\varphi$** , αλλά και τις **παραμορφώνει καμπτικά**, έτσι ώστε οι γειτονικοί κόμβοι να έχουν μια **λογική** και διαφορετική, ενδεχομένως, στροφή.

Στην περίπτωση μη πάγιων φορέων, για την παράλληλη μετακίνηση κόμβων, που συνήθως ανήκουν σε οριζόντια ράβδο, θεωρούμε ότι η παραμόρφωση αφορά μόνο τα υποστυλώματα με τα οποία συνδέεται η ράβδος και όχι την ίδια τη ράβδο, η οποία ως εκ τούτου θεωρείται άκαμπτη.

Η θετική ίνα του φορέα ορίζεται αυθαίρετα.

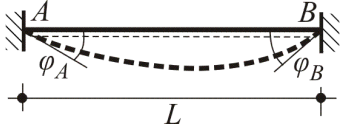
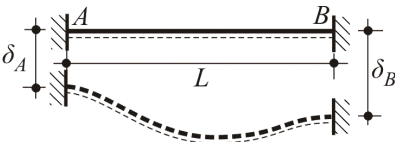
### Παραδείγματα:



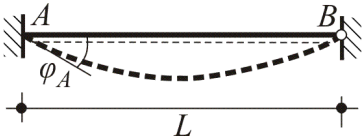
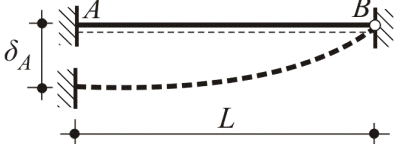
**Βήμα 4°:** Στην περίπτωση ενός **πάγιου** φορέα Με τη βοήθεια των Πινάκων 2 και 3 που ακολουθούν, υπολογίζω τη ροπή,  $M_\varphi$ , που εμφανίζεται **χωριστά** σε κάθε άκρο ανοίγματος του φορέα λόγω **στροφής** τόσο του διπλανού όσο και του απέναντί του κόμβου, λαμβάνοντας υπόψη το μονόπακτο ή αμφίπακτο του ανοίγματός του.

Ως **θετικές**, λαμβάνονται οι στροφές που **εφελκύουν** τη θετική ίνα.

Πίν. 2. Ροπές πάκτωσης αμφίπακτης δοκού λόγω  $\varphi$ ,  $\delta$ 

	$M_{A,B} = \frac{2EJ}{L}(2\varphi_A - \varphi_B)$	$M_{B,A} = \frac{2EJ}{L}(2\varphi_B - \varphi_A)$
	$M_{A,B} = \frac{6EJ}{L^2}(\delta_A - \delta_B)$	$M_{B,A} = \frac{6EJ}{L^2}(\delta_B - \delta_A)$

Πίν. 3. Ροπές πάκτωσης μονόπακτης δοκού λόγω  $\varphi$ ,  $\delta$ 

	$M_{A,B} = \frac{3EJ}{L}\varphi_A$
	$M_{A,B} = \frac{3EJ}{L^2}\delta_A$

**Βήμα 5°:** Στην περίπτωση ενός **μη πάγιου** φορέα, μετατοπίζω τους κόμβους π.χ. μιας οριζόντιας ράβδου και χαράσσω το σκαρίφημα του παραμορφωμένου φορέα μόνον ως προς τα υποστυλώματα, καθώς η ίδια η ράβδος θεωρείται απαραμόρφωτη. Υπολογίζω πάλι, με τη βοήθεια των πινάκων 2 και 3 τις ροπές  $M_\delta$  που αναπτύσσονται κατά περίπτωση στις κεφαλές και στους πόδες των υποστυλωμάτων όπου συγκρατείται η δοκός, ανάλογα με το αν τα υποστυλώματα είναι αμφίπακτα ή μονόπακτα.

**Θετικές** λαμβάνονται οι ροπές όταν η **Θετική ίνα** του υποστηλώματος στη θέση της ροπής, **εφελκύεται**. Αλλιώς είναι αρνητικές.

**Βήμα 6°:** Συγκεντρώνω τις επί μέρους ροπές  $M_p$ ,  $M_\varphi$ ,  $M_\delta$  και μορφώνω τις **εξισώσεις ισορροπίας** των κόμβων ή **συμβιβαστού** των παραμορφώσεων.

Το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος αντιστοιχεί στο πλήθος των αγνώστων στροφών των κόμβων ή και της άγνωστης μετακίνησης για μη πάγιο φορέα.

**Βήμα 7°:** Λύνω το σύστημα των εξισώσεων και προσδιορίζω τα άγνωστα μεγέθη των στροφών,  $\varphi$ , ή και της τυχόν μετατόπισης,  $\delta$ .

**Βήμα 8°:** Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $\varphi$  και  $\delta$  στις εξισώσεις που εκφράζουν τις ροπές στα άκρα των ράβδων, **προσδιορίζω τις ροπές** γύρω από κάθε κόμβο, οπότε μπορώ, κάνοντας χρήση βασικών σχέσεων της Στατικής, να κατασκευάσω τα διαγράμματα  $M$ ,  $Q$ , και  $N$ .

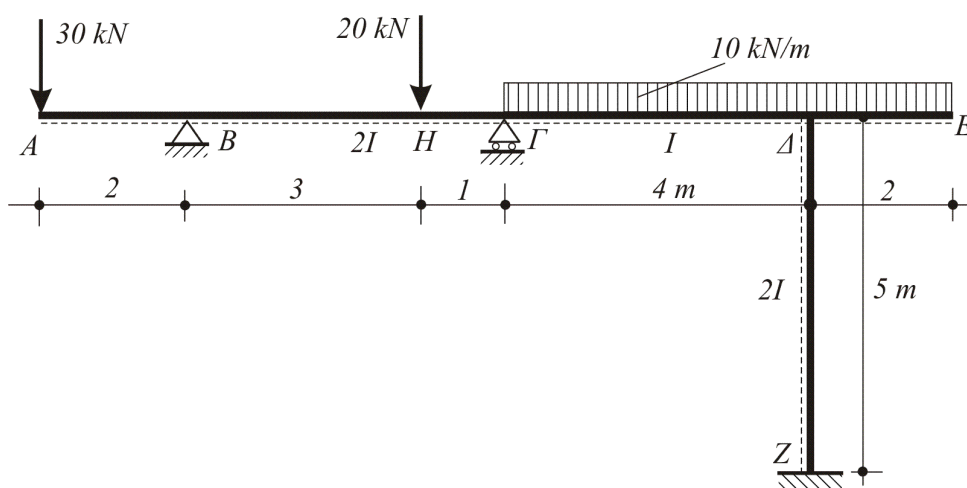
Είναι προφανές ότι η παραπάνω διαδικασία είναι δύσκολη και επίπονη, με μεγάλη την πιθανότητα λάθους σε οποιοδήποτε από τα παραπάνω βήματα.

### Παράδειγμα

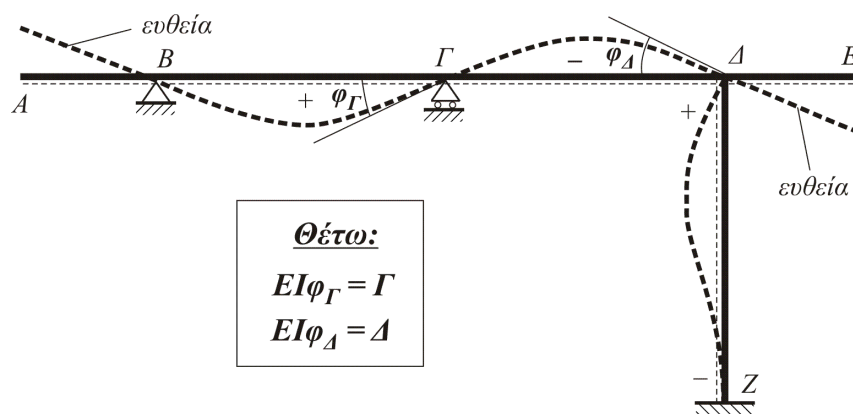
Του παρακάτω πλαισιωτού **πάγιου** φορέα με την εικονιζόμενη φόρτιση, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων,  $Q$ , καμπτικών ροπών,  $M$ , και αξονικών δυνάμεων,  $N$ .

#### Λύση

Εφαρμόζοντας γωνιακές παραμορφώσεις στους εσωτερικούς κόμβους  $\Gamma$  και  $\Delta$ , σχεδιάζω το παρακάτω **σκαρίφημα στρωφών**, όπου φαίνονται οι θετικές και αρνητικές περιοχές των ροπών, από την κατάσταση της θετικής ίνας.



Ο κόμβος  $B$  δεν είναι εσωτερικός, αλλά θεωρείται ακραία άρθρωση, η οποία, αν δεν υπήρχε ο πρόβολος, δεν θα είχε ροπή, ενώ τώρα έχει μόνο τη σταθερή ροπή του προβόλου. Σταθερή επίσης ροπή έχει και ο πρόβολος  $\Delta E$ .



#### Ροπές προβόλων

$$M_{B,A} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta,E} = -10 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ kNm}$$

Θεμελιώδεις ροπές

$$B\Gamma: \text{Μονόπακτη } M_{\Gamma,B} = -\frac{20 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4^2} (4 + 3) - \frac{-60}{2} + \frac{3E2I}{4} \varphi_{\Gamma} = 16,875 + 1,5\Gamma$$

$$\Gamma\Delta: \text{Αμφίπακτη } M_{\Gamma,\Delta} = -\frac{10 \cdot 4^2}{12} - \frac{2 \cdot E \cdot I}{4} (2\varphi_{\Gamma} - \varphi_{\Delta}) = 13,33 - \Gamma + 0,5\Delta$$

$$\Gamma\Delta: \text{Αμφίπακτη } M_{\Delta,\Gamma} = -\frac{10 \cdot 4^2}{12} - \frac{2 \cdot E \cdot I}{4} (2\varphi_{\Delta} - \varphi_{\Gamma}) = 13,33 - \Delta + 0,5\Gamma$$

$$\Delta Z: \text{Αμφίπακτη } M_{\Delta,Z} = \frac{2E \cdot 2I}{5} [2\varphi_{\Delta} - \varphi_Z (= 0)] = 1,6\Delta$$

$$\Delta Z: \text{Αμφίπακτη } M_{Z,\Delta} = \frac{2E \cdot 2I}{5} [2\varphi_Z (= 0) - \varphi_{\Delta}] = -0,8\Delta$$

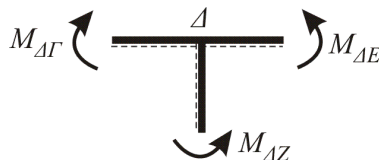
Οι δύο άγνωστοι,  $\Gamma$  και  $\Delta$ , θα προκύψουν από τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων, δηλαδή από το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών, στους κόμβους  $\Gamma$  και  $\Delta$ .

Κόμβος  $\Gamma$ 

Τοποθετούμε τις ροπές έτσι ώστε να είναι **Θετικές**, δηλαδή να **εμφελκύουν** τη θετική ίνα.

$$(\Sigma M)_{\Gamma}^+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\Gamma B} - M_{\Gamma \Delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\Gamma B} = M_{\Gamma \Delta}$$

$$16,875 + 1,5\Gamma = -13,33 - \Gamma + 0,5\Delta \quad \Leftrightarrow \quad 2,5\Gamma - 0,5\Delta = -30,205 \quad (1)$$

Κόμβος  $\Delta$ 

$$(\Sigma M)_{\Delta}^+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\Delta \Gamma} - M_{\Delta E} - M_{\Delta Z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M_{\Delta \Gamma} = M_{\Delta E} + M_{\Delta Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$-13,33 - \Delta + 0,5\Gamma = -20 + 1,6\Delta$$

ή τελικά,

$$0,5\Gamma - 2,6\Delta = -6,67 \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\Gamma = -12,03 \quad \text{και} \quad \Delta = 0,26$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των  $\Gamma$  και  $\Delta$  στις θεμελιώδεις ροπές, προκύπτει:

$$M_{\Gamma B} = -1,17 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma \Delta} = -1,17 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta \Gamma} = -19,58 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta Z} = 0,416 \text{ kNm}$$

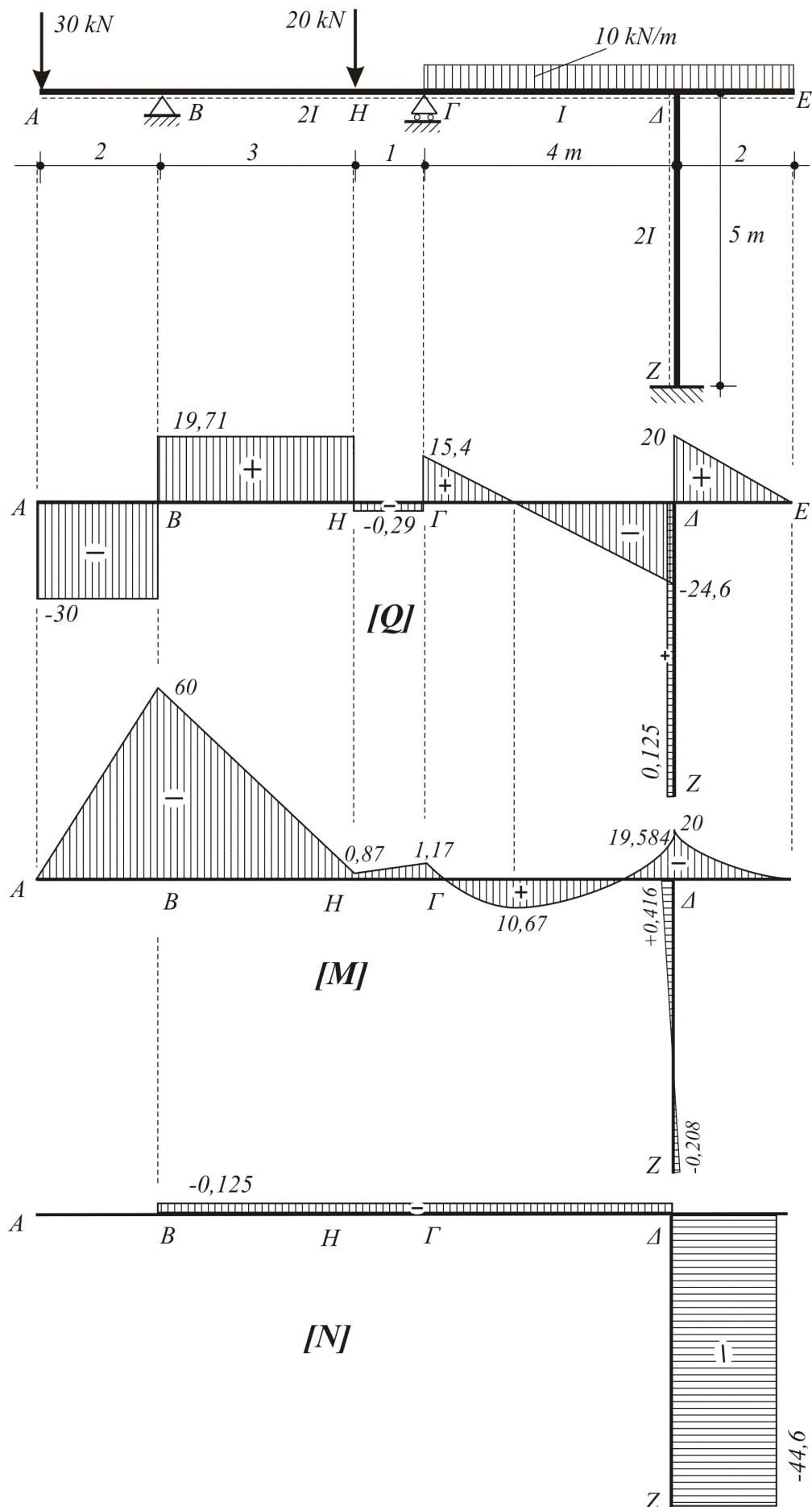
$$M_{Z\Delta} = -0,208 \text{ kNm}$$

Επαλήθευση ισορροπίας κόμβων

$$(\Sigma M)_{\Gamma}^+ = -1,17 - (-1,17) = 0!$$

$$(\Sigma M)_{\Delta}^+ = -19,584 - (-20) - 0,416 = 0!$$

Τώρα, μπορούν εύκολα να χαραχθούν τα διαγράμματα  $Q$ ,  $M$ ,  $N$ , προσδιορίζοντας τις τιμές των αντιστοίχων μεγεθών σε χαρακτηριστικές





θέσεις διατομών. Συγκεκριμένα, από τις ροπές στις στηρίξεις, υπολογίζονται σύμφωνα με την **παρακάτω σχέση**, οι τέμνουσες δυνάμεις στις παρειές των στηρίξεων ενός ανοίγματος, καθώς και οι ροπές ανοιγμάτων.

$$Q_{\alpha\rho\sigma\tau} = Q_{\alpha\rho\sigma\tau}^{\alpha\mu\phi\iota\epsilon\rho} + \frac{M_{\delta\epsilon\xi} - M_{\alpha\rho\sigma\tau}}{L}$$

$$Q_A^{\delta\epsilon\xi} = -30 \text{ kN} = Q_B^{\alpha\rho}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi} = \frac{20 \cdot 1}{4} + \frac{-1,17 - (-60)}{4} = 19,71 \text{ kN} = Q_H^{\alpha\rho}$$

$$Q_H^{\delta\epsilon\xi} = 19,71 - 20 = -0,29 \text{ kN} = Q_\Gamma^{\alpha\rho}$$

$$Q_\Gamma^{\delta\epsilon\xi} = \frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{-19,584 - (-1,17)}{4} = 15,4 \text{ kN}$$

$$Q_\Delta^{\alpha\rho} = 15,4 - 10 \cdot 4 = -24,6 \text{ kN}$$

$$Q_\Delta^{\delta\epsilon\xi} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_Z^{\alpha\nu\omega} = 0 + \frac{0,416 - (-0,208)}{5} = 0,125 \text{ kN} = Q_\Delta^{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$$

$$M_B = -60 \text{ kNm}$$

$$M_H = -60 + 19,71 \cdot 3 = -0,87 \text{ kNm}$$

$$M_\Gamma = -0,87 - 0,29 \cdot 1 = -1,16 \approx -1,17 \text{ kNm}$$

$$M_\Delta^{\alpha\rho} = -19,584 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma\Delta}^{max} = -1,17 + \frac{15,4^2}{2 \cdot 10} = 10,67 \text{ kNm}$$

$$N_B^{\delta\epsilon\xi} = -0,125 \text{ kN} = N_\Delta^{\alpha\rho}$$

$$N_Z^{\alpha\nu\omega} = -24,6 - 20 = -44,6 \text{ kNm}.$$

### 3.2 – Η μέθοδος Cross

Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να επιλύσουμε συνεχείς δοκούς και πλαίσια. Ξεχωρίζει τόσο για την ορθή σκέψη όσο και για την απλότητά της, καθώς αποφεύγουμε τη χρήση γραμμικών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, όπως συμβαίνει με τις άλλες μεθόδους, για να καταλήξουμε στις πραγματικές τιμές των ροπών στους κόμβους.

Το σκεπτικό της μεθόδου ξεκινάει από την **παραδοχή** ότι αρχικά όλοι οι κόμβοι του φορέα νοούνται ως απόλυτα πακτωμένοι, δηλαδή άστρεπτοι και αμετακίνητοι.

Έτσι, με την υπάρχουσα φόρτιση, θεωρούμε ότι σ' όλους τους κόμβους αναπτύσσονται οι λεγόμενες **ροπές πάκτωσης**, ή **θεμελιώδεις ροπές**, οι οποίες όμως **δεν δίδουν** αλγεβρικό άθροισμα 0, παρουσιάζοντας έτσι μια συνισταμένη ροπή, η οποία θεωρείται **πλεονάζουσα**.

Η ροπή αυτή, που γίνεται η αιτία περιστροφής του κόμβου, **πριν** τον περιστρέψει, και ως εκ τούτου χαλαρώσει, **κατανέμεται** στους εκατέρωθεν **κλάδους** του φορέα, **ανάλογα με την ακαμψία του καθενός, μεταφέροντας** ταυτόχρονα στους απέναντι κόμβους, τη **μισή ποσότητα** της ροπής τους.

Η διαδικασία αυτή **επαναλαμβάνεται** και στους γειτονικούς κόμβους, οι οποίοι με τη σειρά τους μεταφέρουν πάλι αντίστοιχες ποσότητες ροπών στους απέναντι κόμβους, μέχρις ότου, ύστερα από μερικά βήματα μεταφοράς, η κατανεμημένη ροπή κάθε κόμβου να γίνει **αμελητέα**.

Στο τέλος, το **αλγεβρικό** άθροισμα των ροπών που εμφανίζεται στο άκρο κάθε κλάδου του φορέα μετά από όλες τις κατανομές, εκφράζει κατά **Cross** την πραγματική τιμή της ροπής του.

Η παραπάνω διαδικασία, η οποία στην αρχή φαίνεται περίπλοκη, μπορεί να γίνει πολύ απλή, αν υπάρξει μια καλή οργάνωση στα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούν:

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Υπολογίζουμε τη **θεμελιώδη ροπή** που εμφανίζεται **χωριστά** σε κάθε άκρο ανοίγματος του φορέα από την εξωτερική του φόρτιση, σύμφωνα με τον πίνακα 1 της σελ. 67, λαμβάνοντας υπόψη το μονόπακτο ή αμφίπακτο του ανοίγματός του.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η σήμανση (πρόσημο) των θεμελιωδών ροπών **κατά Cross** δεν συσχετίζεται με το πρόσημο του πίνακα, αλλά συμβατικά. Δηλαδή:

- **Θετικές** είναι πάντα οι **δεξιόστροφες** ροπές, ενώ
- **αρνητικές** είναι πάντα οι **αριστερόστροφες**

Συνεπώς το **πρόσημο** που θα προκύψει από τις **κατανομές** για την πραγματική τιμή της ροπής ενός κόμβου, όπως θα εξηγηθεί και στα παραδείγματα, αφορά αποκλειστικά στο **δεξιόστροφο** ή **αριστερόστροφο** της ροπής, η οποία, τελικά, θα είναι **θετική** αν **εφελκύει** τη **θετική** **ίνα** του φορέα και **αρνητική** αν τη **θλίβει**.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Για κάθε κόμβο υπολογίζουμε χωριστά τους **δείκτες ακαμψίας** των εκατέρωθεν ανοιγμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τη ροπή αδράνειας της διατομής, το μήκος ανοίγματος και το αν αυτό είναι μονόπακτο ή αμφίπακτο.

Ως **δείκτης ακαμψίας**, **k**, νοείται η συγκεντρωμένη καμπτική ροπή που πρέπει να εφαρμοστεί στην άκρη μιας δοκού, για να περιστραφεί η διατομή της κατά γωνία ίση με τη μονάδα.

Αν **J** είναι η ροπή αδράνειας της διατομής του ανοίγματος και **L** το μήκος του, τότε ο δείκτης ακαμψίας **k** του ανοίγματος, είναι:

- $k = J/L$ , για **αμφίπακτο** άνοιγμα
- $k = 0,75J/L$ , για **μονόπακτο** άνοιγμα

**Βήμα 3°:** Από τους δείκτες ακαμψίας των ανοιγμάτων, θα προκύψουν τώρα οι λεγόμενοι **συντελεστές κατανομής**, που αντιστοιχούν χωριστά σε κάθε πλευρά ενός **εσωτερικού** (και όχι ακραίου) κόμβου.

Ως **συντελεστής κατανομής**,  $\mu$ , μιας πλευράς του κόμβου, νοείται το **πηλίκο** του **δείκτη** ακαμψίας αυτής της πλευράς δια του **αθροίσματος των δεικτών** ακαμψίας εκατέρωθεν του κόμβου. Είναι συνεπώς φανερό ότι ο  $\mu$  θα είναι ένας αριθμός μικρότερος του 1, ενώ το άθροισμα των συντελεστών κατανομής εκατέρωθεν του κόμβου θα είναι πάντα 1.

**Βήμα 4°:** Ξεκινώντας κατά προτίμηση από κόμβο με την απόλυτα μεγαλύτερη τιμή της πλεονάζουσας ροπής, την κατανέμω στις διπλανές ράβδους του κόμβου, **πολλαπλασιάζοντάς την με τους αρνητικούς** αντίστοιχους συντελεστές κατανομής.

**Βήμα 5°:** Μεταφέρω τις **μισές** από τις κατανεμημένες ποσότητες κάθε ράβδου μαζί με το πρόσημό τους, στους απέναντι κόμβους, δηλαδή στο άλλο άκρο της κάθε ράβδου. Οι μισές αυτές ποσότητες θα προστεθούν αλγεβρικά στις όποιες ροπές υπάρχουν ήδη στους εκατέρωθεν κόμβους.

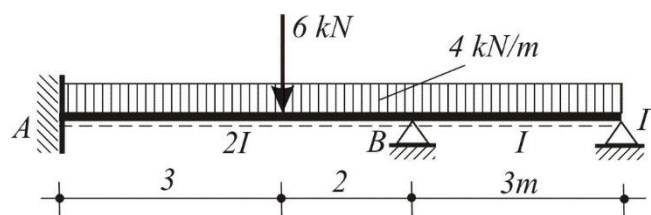
**Βήμα 6°:** Επαναλαμβάνω τα βήματα 4 και 5 στους υπόλοιπους κόμβους.

**Βήμα 7°** Επιστρέφω στον πρώτο κόμβο και ελέγχω μήπως έχουν συσσωρευτεί πρόσθετες πλεονάζουσες ροπές λόγω των ροπών κατανομής που προέρχονται από γειτονικούς κόμβους, ώστε να επαναλάβω τα βήματα 4 και 5.

## Παραδείγματα

1

Αφού πρώτα γίνει η επίλυση του εικονιζόμενου **πάγιου** φορέα με τη μέθοδο **Cross**, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.



**Λύση**

Ακολουθώντας τα διαδικαστικά βήματα της μεθόδου **Cross**, έχουμε:

Θεμελιώδεις ροπές: (Πίνακας 1, σελ. 67)

$$M_{A,B} = \frac{4 \cdot 5^2}{12} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 2^2}{5^2} = 11,213 \text{ kNm}$$

$$M_{B,A} = -\frac{4 \cdot 5^2}{12} - \frac{6 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} = -12,653 \text{ kNm}$$

$$M_{B,\Gamma} = \frac{4 \cdot 3^2}{12} = 3,0 \text{ kNm}$$

Δείκτες ακαμψίας - Συντελεστές κατανομής:

$$k_{AB} = \frac{2J}{5} = 0,4J, \quad k_{BG} = 0,75 \frac{J}{3} = 0,25J$$

$$\mu_{BA} = \frac{0,4J}{0,4J + 0,25J} = 0,615, \quad \mu_{BG} = \frac{0,25J}{0,4J + 0,25J} = 0,385$$

$$\text{Επαλήθευση: } \mu_{AB} + \mu_{BG} = 1$$

Παρατηρήσεις:

- Στην πραγματική **πάκτωση A** δεν υπάρχει συντελεστής κατανομής. Αυτό σημαίνει ότι η πάκτωση **δεν μεταβιβάζει** ροπή, αλλά **δέχεται**.
- Προσοχή! Οι θεμελιώδεις ροπές προσημαίνονται κατά Cross ανάλογα με τη φορά διαγραφής τους (+ **δεξιόστροφες**, - αριστερόστροφες).
- Η πλεονάζουσα ροπή του κόμβου B, είναι:  $-12,653 + 3 = -9,653 \text{ kNm}$ .
- Η **θετική**  $M_{\text{Cross}}$  που βρέθηκε στην πάκτωση, σημαίνει ότι η φορά της ροπής είναι **δεξιόστροφη**. Συνεπώς **θλίβει** τη θετική ίνα του φορέα, άρα η πραγματική ροπή είναι **αρνητική**. Αντίστοιχα η αρνητική  $M_{\text{Cross}}$  που βρέθηκε στην αριστερή παρειά της στήριξης B σημαίνει ότι η ροπή είναι αριστερόστροφη και συνεπώς **θλίβει** τη θετική ίνα, όπως τη θλίβει και η δεξιόστροφη θετική ροπή της δεξιάς παρειάς της στήριξης B.

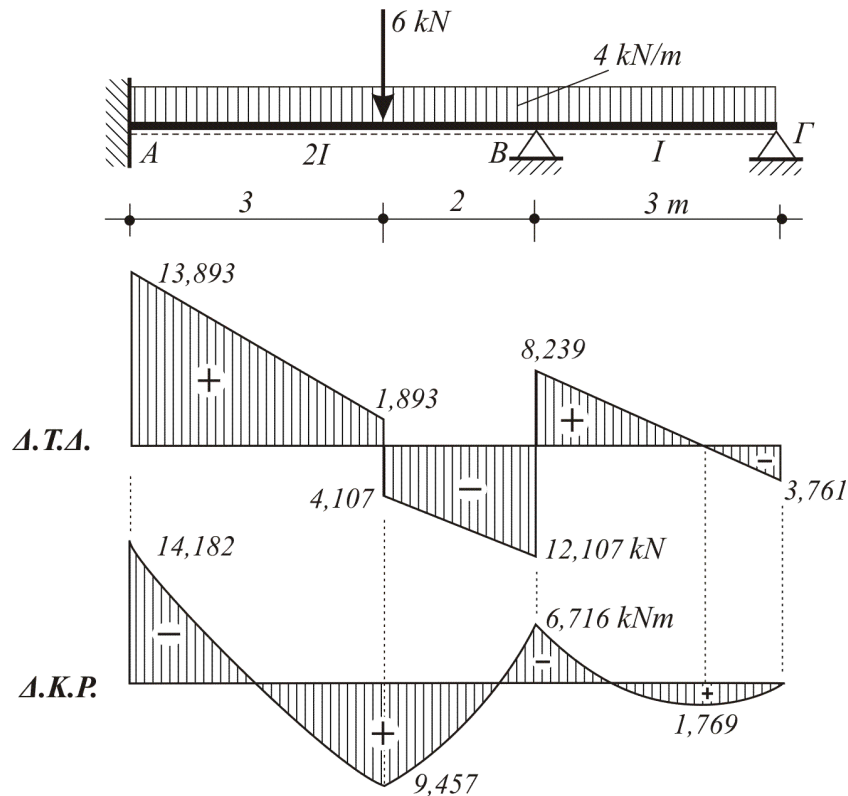
Κόμβοι	<b>A</b>			<b>B</b>	
Ράβδοι	<b>AB</b>		<b>BA</b>	<b>BΓ</b>	
-μ	-		-0,615	-0,385	
$M_{\text{θεμελιώδης}}$	11,213		-12,653	3	
$\Delta M$	2,969		← 5,937	3,716	
$M_{\text{Cross}}$	14,182		-6,716	6,716	
$M_{\text{πραγματική}}$	-14,182		-6,716	-6,716	

Από τις ροπές στις στηρίξεις A και B, υπολογίζονται τώρα σύμφωνα με την παρακάτω σχέση που γνωρίσαμε ήδη και στη μέθοδο των παραμορφώσεων, οι τέμνουσες δυνάμεις στις παρειές των στηρίξεων ενός **ανοίγματος** για το διάγραμμα Q, καθώς και οι ροπές ανοιγμάτων για το διάγραμμα M.

$$Q_{\text{αριστ}} = Q_{\text{αριστ}}^{\text{αμφιερ}} + \frac{M_{\text{δεξ}} - M_{\text{αριστ}}}{L}, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$Q_{A,\text{δεξ}} = \frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 2}{5} + \frac{-6,716 - (-14,182)}{5} = 10 + 2,4 + 1,493 = 13,893 \text{ kN}$$

$$Q_{B,\text{αρ}} = \frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 3}{5} + \frac{-14,182 - (-6,716)}{5} = 10 + 3,6 - 1,493 = 12,107 \text{ kN}$$



$$Q_{B, δεξ} = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{0 - (-6,716)}{3} = 6 + 2,239 = 8,239 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma, αρ} = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{-6,716 - 0}{3} = 6 - 2,239 = 3,761 \text{ kN}$$

$$M_{AB}^{max} = -14,182 + \frac{1,893 + 13,893}{2} = 9,457 \text{ kNm}$$

$$M_{B\Gamma}^{max} = \frac{3,761^2}{2 \cdot 4} = 1,768 \quad \text{ή} \quad M_{B\Gamma}^{max} = -6,716 + \frac{8,239^2}{2 \cdot 4} = 1,769 \text{ kNm}$$

2

Του πλαισιωτού, **μη πάγιου** φορέα με την εικονιζόμενη φόρτιση να κατασκευαστούν τα διαγράμματα **Q**, **M**, **N**:

α) Με τη μέθοδο **Cross** και

β) Με τη μέθοδο των **Παραμορφώσεων**.

### Λύση

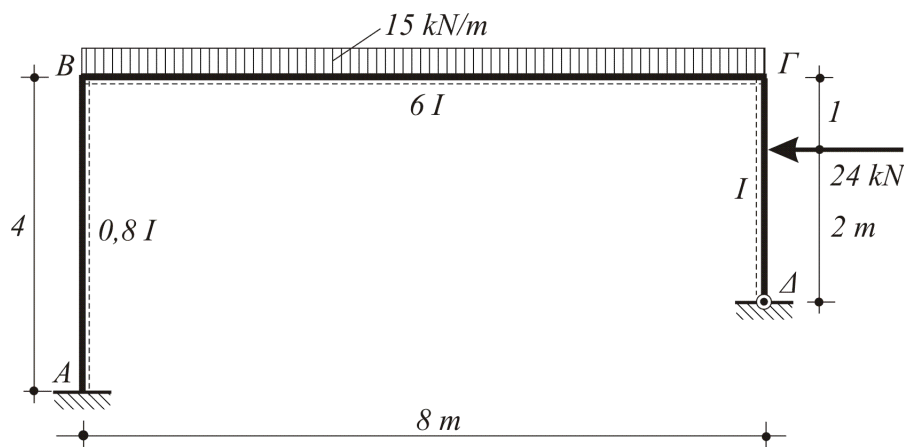
#### Α) Μέθοδος **Cross**

Δείκτες ακαμψίας - συντελεστές κατανομής

$$k_{AB} = \frac{0,8I}{4} = 0,2I \quad k_{B\Gamma} = \frac{6I}{8} = 0,75I \quad k_{\Gamma\Delta} = 0,75 \frac{I}{3} = 0,25I$$

$$\mu_{BA} = \frac{0,2I}{0,2I + 0,75I} = 0,21 \quad \mu_{B\Gamma} = 0,79$$

$$\mu_{\Gamma B} = \frac{0,75I}{0,75I + 0,25I} = 0,75 \quad \mu_{\Gamma\Delta} = 0,25$$

**Ροπές λόγω φορτίων****Θεμελιώδεις:**

Το πρόσημο εξαρτάται από την κατάσταση της ίνας (+ εφελκυσμός, - θλίψη)

$$M_{B,\Gamma} = M_{\Gamma,B} = \frac{-15 \cdot 8^2}{12} = -80 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma,\Delta} = -\frac{24 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3^2} (2 + 3) = -13,33 \text{ kNm}$$

**Ροπές κατά Cross:**

Το συμβατικό πρόσημο, είναι: + για δεξιόστροφες, - για αριστερόστροφες.

$$M_{B,\Gamma}^0 = +80 \text{ kNm}, \quad M_{\Gamma,B}^0 = -80 \text{ kNm}, \quad M_{\Gamma,\Delta}^0 = +13,33 \text{ kNm}$$

**Ροπές λόγω οριζόντιας μετατόπισης**

Προσοχή, **μόνον οι στύλοι** αναλαμβάνουν ροπές, οι οποίες εξαρτώνται από την κατάσταση της ίνας στη θέση της ροπής (+ εφελκ, - θλίψη).

**Θεμελιώδεις**

$$\text{Θέτω: } EI\delta = \Delta$$



$$M_{B,A} = \frac{6E \cdot 0,8I}{4^2} \delta = 0,3\Delta, \quad M_{A,B} = -0,3\Delta$$

$$M_{\Gamma,\Delta} = -\frac{3E \cdot I}{3^2} \delta = -0,33\Delta$$

**Κατά Cross**

$$M_{A,B}^0 = +0,3\Delta, \quad M_{B,A}^0 = +0,3\Delta,$$

$$M_{\Gamma,\Delta}^0 = +0,33\Delta$$

Πίνακας κατανομής ροπών λόγω φορτίων

Προσοχή, η **πλεονάζουσα** ροπή κάθε κόμβου κατανέμεται στα εκατέρωθεν ανοίγματα, από όπου, η μισή μεταβιβάζεται στους απέναντι κόμβους.

Κόμβοι	A	B		Γ	
Ράβδοι	AB	BA	BΓ	ΓB	ΓΔ
-μ	-	-0,21	-0,79	-0,75	-0,25
M <sup>0</sup>	-	-	+80	-80	+13,33
1 <sup>η</sup> καταν. κόμβ. B	-8,4	← -16,8	-63,2 →	-31,6	
1 <sup>η</sup> καταν. κόμβ. Γ			+36,85	← +73,7	+24,57
2 <sup>η</sup> καταν. κόμβ B	-3,87	← -7,74	-29,11 →	-14,56	
2 <sup>η</sup> καταν. κόμβ Γ			+5,46	← +10,92	+3,64
3 <sup>η</sup> καταν. κόμβ B	-0,57	← -1,15	-4,31 →	-2,16	
3 <sup>η</sup> καταν. κόμβ Γ			+0,81	← +1,62	+0,54
4 <sup>η</sup> καταν. κόμβ B	-0,09	-0,17	-0,64 →	-0,32	
4 <sup>η</sup> καταν. κόμβ Γ			+0,12	← +0,24	+0,08
5 <sup>η</sup> καταν. κόμβ B	-0,01	← -0,02	-0,10 →	-0,05	
5 <sup>η</sup> καταν. κόμβ Γ			+0,02	← +0,04	+0,01
6 <sup>η</sup> καταν. κόμβ B		0	-0,02		
Ροπή <b>Cross</b>	-12,94	-25,88	+25,88	-42,17	+42,17
Πρόσημο <b>Πραγμ.</b>	+	-	-	-	-

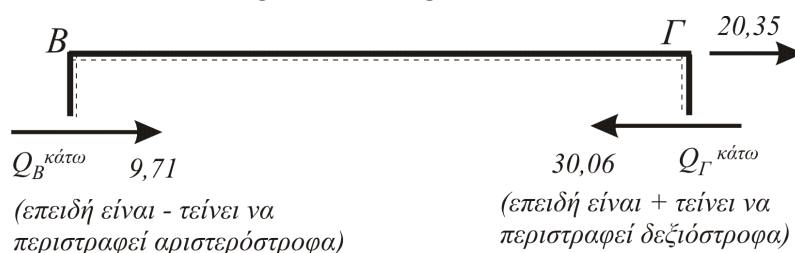
**Σημείωση:** Το πρόσημο της ροπής Cross δείχνει τη φορά της ροπής, δηλαδή + δεξιόστροφη, - αριστερόστροφη. Το πραγματικό πρόσημο θα προκύψει αν δούμε τι **παθαίνει** η ίνα στη συγκεκριμένη θέση λόγω στροφής της ροπής.

Δύναμη παγίωσης λόγω τεμνουσών

Οι τέμνουσες που αναπτύσσονται στους στύλους κάτω από το ζύγωμα, είναι:

$$Q_A^{\text{πάνω}} = Q_B^{\text{κάτω}} = 0 + \frac{M_{B,A} - M_{A,B}}{4} = \frac{-25,88 - 12,94}{4} = -9,71 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\text{κάτω}} = \frac{24 \cdot 2}{3} + \frac{0 - (-42,17)}{3} = +30,06 \text{ kN}$$



Άρα η δύναμη παγίωσης του ζυγώματος ΒΓ, που δρα σαν αντίδραση, αντίθετα στη διαφορά των δύο τεμνουσών, είναι:

$$F_{\Pi}^{(Q)} = 30,06 - 9,71 = 20,35 (\rightarrow)$$

Πίνακας κατανομής ροπών λόγω μετατόπισης δ

Σημείωση: Όλες οι τιμές των ροπών **πολλαπλασιάζονται επί Δ**.

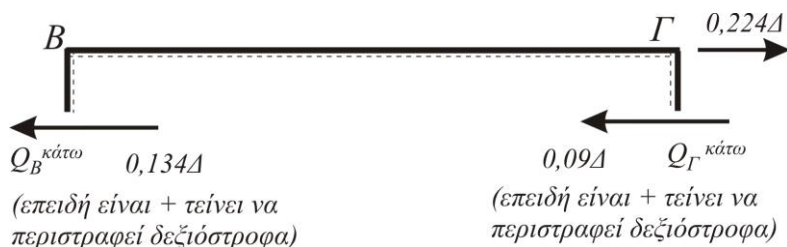
Κόμβοι	A	B		Γ	
Ράβδοι	AB	BA	ΒΓ	ΓΒ	ΓΔ
-μ	-	-0,21	-0,79	-0,75	-0,25
M <sup>0</sup>	+0,3	+0,3			+0,33
1 <sup>η</sup> κατ. κόμβ. Γ			-0,125	← -0,25	-0,08
1 <sup>η</sup> κατ. κόμβ. B	-0,019	← -0,037	-0,138 →	-0,069	
2 <sup>η</sup> κατ. κόμβ Γ			+0,026	← +0,052	+0,017
2 <sup>η</sup> κατ. κόμβ B	-0,03	← -0,05	-0,021 →	-0,011	
3 <sup>η</sup> κατ. κόμβ Γ			+0,04	← +0,08	+0,03
3 <sup>η</sup> κατ. κόμβ B		-0,01	-0,03 →	-0,01	
4 <sup>η</sup> κατ. κόμβ Γ				+0,01	
Ροπή <b>Cross</b>	+0,278	+0,257	-0,257	-0,27	+0,27
Προσ. Πραγμ.	-	+		-	

Δύναμη παγίωσης λόγω δ

Αντίστοιχα, οι τέμνουσες στους στύλους κάτω από το ζύγωμα, είναι:

$$Q_A^{παν} = Q_B^{κατω} = 0 + \frac{M_{B,A} - M_{A,B}}{4} = \frac{0,257 - (-0,278)}{4} \Delta = 0,1338 \cdot \Delta$$

$$Q_F^{κατω} = \frac{0 - (-0,27)}{3} \Delta = 0,09 \cdot \Delta$$



Άρα η δύναμη παγίωσης του ζυγώματος ΒΓ, σαν δράση, θα είναι προφανώς το άθροισμα των δύο τεμνουσών, με φορά εκείνη της παραμόρφωσης δ:

$$F_{\Pi}^{(\delta)} = 0,224 \cdot \Delta (\rightarrow)$$

Επειδή όμως το ζύγωμα του πλαισίου ισορροπεί, έπεται ότι το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων παγίωσης (λόγω Q και δ), είναι 0. Άρα:



$$F_{\Pi}^{(Q)} + F_{\Pi}^{(\delta)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20,35 + 0,224 \cdot \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = -90,8$$

Συνεπώς οι τελικές τιμές, που λαμβάνονται από την πραγματική σήμανση των δύο πινάκων κατανομής, διαμορφώνονται ως εξής:

$$M_{A,B} = 12,94 + 0,278 \cdot 90,8 = +38,21 \text{ kNm}$$

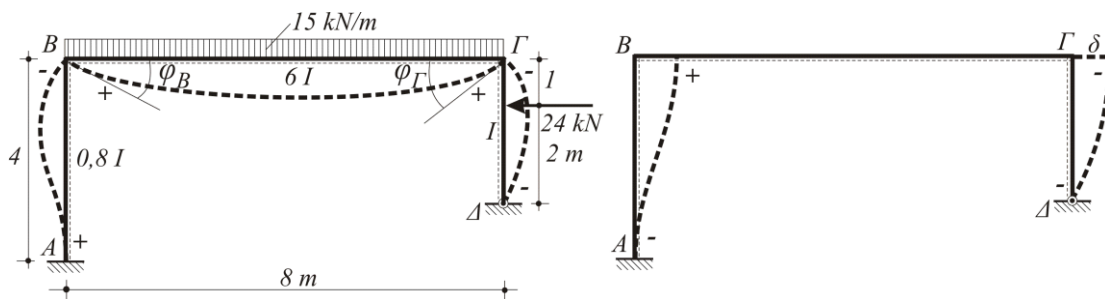
$$M_{B,A} = -25,88 - 0,257 \cdot 90,8 = -49,24 \text{ kNm}$$

$$M_{B,\Gamma} = -25,88 - 0,257 \cdot 90,8 = -49,24 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma,B} = -42,17 + 0,27 \cdot 90,8 = -17,63 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma,\Delta} = -42,17 + 0,27 \cdot 90,8 = -17,63 \text{ kNm}.$$

### Β) Μέθοδος Παραμορφώσεων



Μετά την εφαρμογή γωνιακών παραμορφώσεων στους κόμβους Β και Γ αλλά και οριζόντιας μετατόπισης στο ζύγωμα ΒΓ, προκύπτουν, με τη βοήθεια των αντιστοίχων πινάκων 1, 2, και 3, οι παρακάτω **Θεμελιώδεις** ροπές, όπου ο 1<sup>ος</sup> όρος παριστάνει τη θεμελιώδη ροπή λόγω εξωτερικής φόρτισης, ο 2<sup>ος</sup> λόγω γωνιακής παραμόρφωσης και ο 3<sup>ος</sup> λόγω μετακίνησης:

$$M_{A,B} = 0 + \frac{2E \cdot 0,8I}{4} \varphi_B - \frac{6E \cdot 0,8I}{4^2} \delta = 0,4B - 0,3\Delta$$

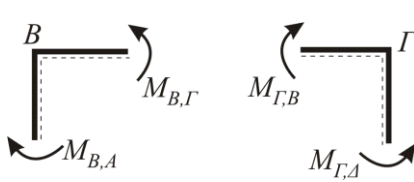
$$M_{B,A} = 0 - \frac{4E \cdot 0,8I}{4} \varphi_B + \frac{6E \cdot 0,8I}{4^2} \delta = -0,8B + 0,3\Delta$$

$$M_{B,\Gamma} = -\frac{15 \cdot 8^2}{12} + \frac{2E \cdot 6I}{8} (2\varphi_B - \varphi_{\Gamma}) + 0 \cdot \delta = -80 + 3B - 1,5\Gamma$$

$$M_{\Gamma,B} = -\frac{15 \cdot 8^2}{12} + \frac{2E \cdot 6I}{8} (2\varphi_{\Gamma} - \varphi_B) + 0 \cdot \delta = -80 + 3\Gamma - 1,5B$$

$$M_{\Gamma,\Delta} = -\frac{24 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3^2} (3 + 2) - \frac{3E \cdot I}{3} \varphi_{\Gamma} - \frac{3E \cdot I}{3^2} \delta = -13,33 - \Gamma - 0,3\Delta$$

Οι 3 άγνωστοι θα βρεθούν τώρα από τις εξισώσεις ισορροπίας ροπών στους 2 κόμβους και το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των οριζοντίων δυνάμεων στο ζύγωμα. Δηλαδή:

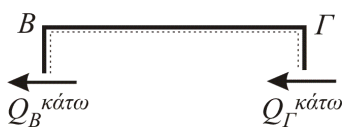


$$(\Sigma M)_B^{\circ+} = 0 \Rightarrow M_{B,A} - M_{B,\Gamma} = 0 \Rightarrow M_{B,A} = M_{B,\Gamma}$$

$$\text{ή } 0,3\Delta - 0,8B = -80 + 3B - 1,5\Gamma \quad (1)$$

$$(\Sigma M)_\Gamma^{\circ+} = 0 \Rightarrow M_{\Gamma,B} - M_{\Gamma,\Delta} = 0 \Rightarrow M_{\Gamma,B} = M_{\Gamma,\Delta}$$

$$-80 + 3\Gamma - 1,5B = -13,33 - \Gamma - 0,33\Delta \quad (2)$$



$$\Sigma F_x^{\circ+} = 0 \Rightarrow Q_B^{\text{κάτω}} + Q_\Gamma^{\text{κάτω}} = 0 \quad \text{Είναι:}$$

$$Q_B^{\text{κάτω}} = Q_A^{\text{άνω}} = \frac{M_{B,A} - M_{A,B}}{L_{AB}} =$$

$$= \frac{-0,4B + 0,3\Delta - 0,8B + 0,3\Delta}{4} = -0,3B + 0,15\Delta$$

$$Q_\Gamma^{\text{κάτω}} = Q_\Gamma^0 + \frac{0 - M_{\Gamma,\Delta}}{3} = \frac{24 \cdot 2}{3} + \frac{13,33 + \Gamma + 0,33\Delta}{3}$$

$$= 20,44 + 0,33\Gamma + 0,11\Delta$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad -0,3B + 0,33\Gamma + 0,26\Delta + 20,44 = 0 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3), προκύπτει:

$$B = 27,5, \quad \Gamma = 34,47, \quad \Delta = -90,6.$$

Συνεπώς οι τιμές των θεμελιωδών ροπών, διαμορφώνονται τώρα ως εξής:

$$M_{A,B} = 0,4 \cdot 27,5 + 0,3 \cdot 90,6 = 38,9 \text{ kNm}$$

$$M_{B,A} = -0,3 \cdot 90,6 - 0,8 \cdot 27,5 = -49,18 \text{ kNm}$$

$$M_{B,\Gamma} = -80 + 3 \cdot 27,5 - 1,5 \cdot 34,47 = -49,20 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma,B} = -80 + 3 \cdot 34,47 - 1,5 \cdot 27,5 = -17,84 \text{ kNm}$$

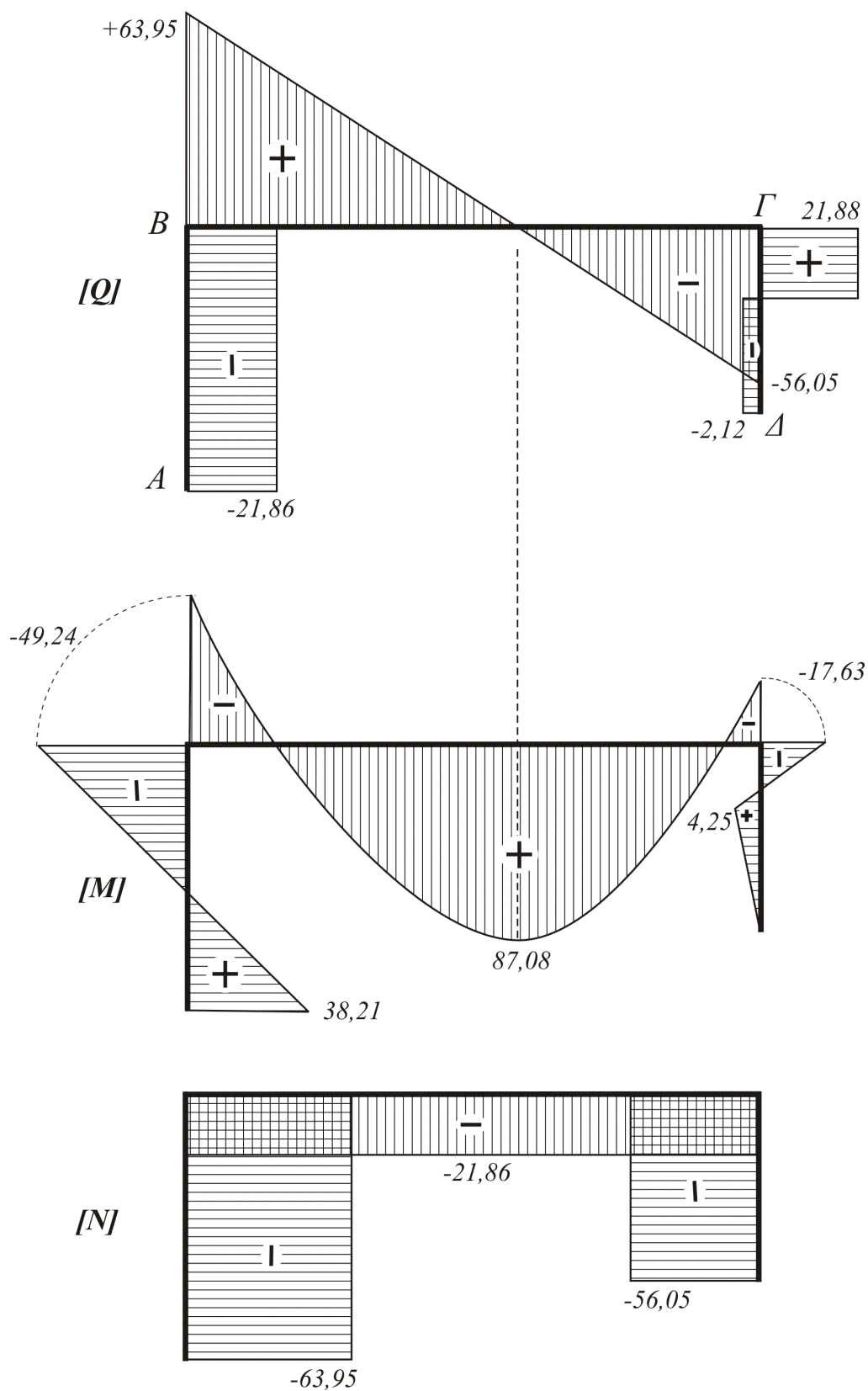
$$M_{\Gamma,\Delta} = -13,33 - 34,47 + 0,32 \cdot 90,6 = -17,90 \text{ kNm}$$

#### Σημείωση:

Οι ροπές  $M_{B,A}$  και  $M_{B,\Gamma}$  είναι **θεωρητικά ίσες**, καθώς εμφανίζονται στις παρειές του κόμβου Β χωρίς μεσολάβηση τρίτης ροπής. Το ίδιο, φυσικά, ισχύει και για τις ροπές  $M_{\Gamma,B}$  και  $M_{\Gamma,\Delta}$ . Το γεγονός ότι οι τιμές του κάθε ζευγαριού είναι τόσο κοντινές, αφενός μεν **επαληθεύει την ορθότητα** των υπολογισμών, αφετέρου μας επιτρέπει να πάρουμε τον μέσο όρο τους.

Παρακάτω αναπτύσσονται τα διαγράμματα Q, M, N, λαμβάνοντας υπόψη τις καμπτικές ροπές που προέκυψαν από τη μέθοδο **Cross**, οι οποίες, όπως ήταν αναμενόμενο, ελάχιστα διαφέρουν από τις αντίστοιχες τιμές της μεθόδου των παραμορφώσεων.

Επί πλέον υπολογίστηκαν οι τιμές τεμνουσών δυνάμεων σε χαρακτηριστικές διατομές του φορέα, καθώς και οι μέγιστες ροπές κάμψης που αντιστοιχούν στα ανοίγματα ΒΓ και ΓΔ.



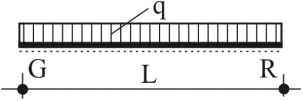
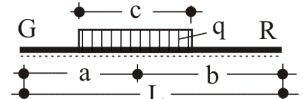
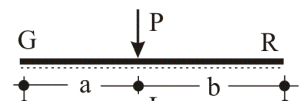
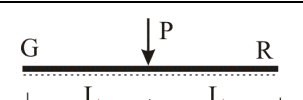
$$Q_A^{\acute{\alpha}\nu\omega} = \frac{-49,24 - 38,21}{4} = -21,86 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi} = \frac{15 \cdot 8}{2} + \frac{-17,63 + 49,24}{8} = 63,95 \text{ kN}$$



ο όρος  $di$  αντικαθίσταται στην εξίσωση με το πραγματικό μήκος του ανοίγματος

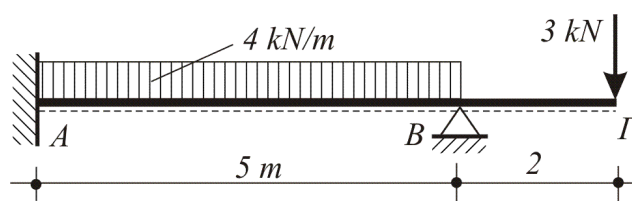
Αν στο φορέα υπάρχει πρόβολος, τότε αυτός αφαιρείται, και στη θέση της στήριξής του τίθεται η ροπή προβόλου. Στην περίπτωση όμως που υπάρχει πάκτωση, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, τότε αυτή αντικαθίσταται με στήριξη, η οποία, μετά την πάκτωση, συνοδεύεται με υποθετικό άνοιγμα άπειρης ροπής αδράνειας.

Φ ό ρ τ ι σ η	G	R
	$\frac{qL^2}{4}$	$\frac{qL^2}{4}$
	$\frac{q \cdot a \cdot b \cdot c}{L^2} \left( L + b - \frac{c^2}{4a} \right)$	$\frac{q \cdot a \cdot b \cdot c}{L^2} \left( L + a - \frac{c^2}{4b} \right)$
	$\frac{P \cdot a \cdot b}{L^2} (L + b)$	$\frac{P \cdot a \cdot b}{L^2} (L + a)$
	$\frac{3P \cdot L}{8}$	$\frac{3P \cdot L}{8}$

## Παραδείγματα

1

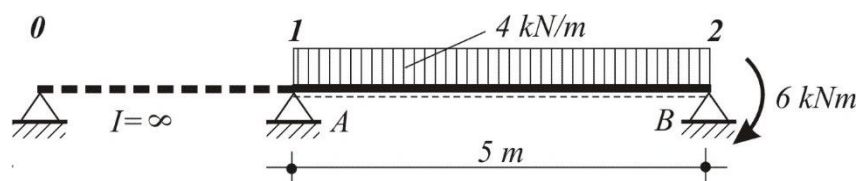
Του εικονιζόμενου φορέα να προσδιοριστεί η ροπή στην πάκτωση.



## Λύση

Για να εφαρμόσω την εξίσωση Clapeyron, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα,

- αποκόπτω τον πρόβολο, εφαρμόζοντας ροπή  $M_B = -3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}$  και
- αντικαθιστώ την πάκτωση με απλή στήριξη, προσθέτοντας όμως ένα αφόρτιστο υποθετικό άνοιγμα με άπειρη ροπή αδράνειας.



Έτσι, η εξίσωση τριών ροπών για τη στήριξη 1, δηλαδή  $v = 1$ , είναι:

$$d_1 M_0 + 2(d_1 + d_2) M_1 + d_2 M_2 = -d_1 R_1 - d_2 G_2$$

Όπου:  $M_0 = 0$ ,  $M_2 = M_B = -6 \text{ kNm}$ , καθώς επίσης και:

$$d_1 = \frac{I}{\infty} = 0, \quad d_2 = \frac{5I}{I} = 5, \quad G_1 = R_1 = 0, \quad G_2 = R_2 = \frac{qL^2}{4} = \frac{4 \cdot 5^2}{4} = 25$$

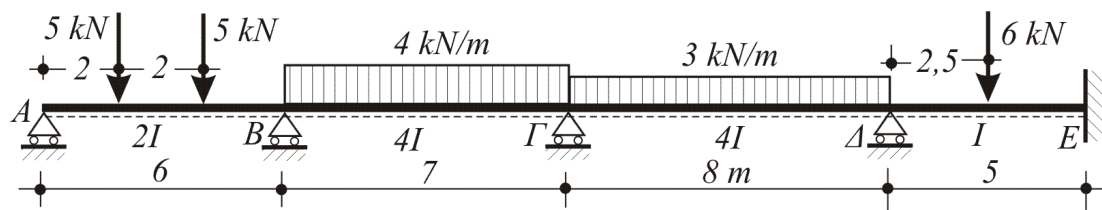
Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$0 + 2(0 + 5)M_1 + 5(-6) = 0 - 5 \cdot 25$$

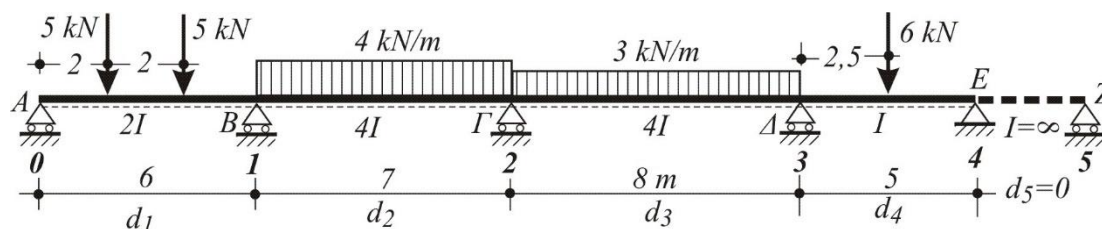
$$10M_1 - 30 = -125 \quad \Leftrightarrow \quad M_1 = M_A = -\frac{95}{10} = -9,5 \text{ kNm}$$

**2**

Του συνεχούς φορέα που εικονίζεται στο σχήμα, με τη σημειούμενη φόρτιση και γεωμετρία, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα Q και M.



### Λύση



Μετά την αρίθμηση των στηρίξεων, την αντικατάσταση της πάκτωσης με στήριξη άρθρωσης και ταυτόχρονη προσθήκη αφόρτιστου ανοίγματος άπειρης ροπής αδράνειας, θέτοντας ως αυθαίρετη ροπή αδράνειας του φορέα την τιμή  $I$ , οι χαρακτηριστικές παράμετροι, που είναι απαραίτητες για να πλαισιώσουν την εξίσωση των τριών ροπών, είναι:

$$d_1 = 6 \frac{I}{2I} = 3, \quad d_2 = 7 \frac{I}{4I} = 1,75, \quad d_3 = 8 \frac{I}{4I} = 2, \quad d_4 = 5 \frac{I}{I} = 5, \quad d_5 = \frac{I}{\infty} = 0$$

$$R_1 = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{6^2} (6 + 2) + \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{6^2} (6 + 4) = 20,$$

$$G_2 = R_2 = \frac{4 \cdot 7^2}{4} = 49, \quad G_3 = R_3 = \frac{3 \cdot 8^2}{4} = 48,$$

$$G_4 = R_4 = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{8} = 11,25 \quad \text{και} \quad G_5 = 0.$$

Τώρα, οι άγνωστες τιμές των ροπών στις στηρίξεις Β, Γ, Δ, και Ε του φορέα θα προσδιοριστούν από την επίλυση του συστήματος τεσσάρων εξισώσεων Clapeyron που θα προκύψουν αντίστοιχα για τις αριθμημένες στηρίξεις 1, 2, 3 και 4 του διαμορφωμένου φορέα.

Στήριξη 1:  $2(3 + 1,75)M_1 + 1,75M_2 = -3 \cdot 20 - 1,75 \cdot 49$   
 $9,5M_1 + 1,75M_2 = -145,75 \quad (1)$

Στήριξη 2:  $1,75M_1 + 2(1,75 + 2)M_2 + 2M_3 = -1,75 \cdot 49 - 2 \cdot 48$   
 $1,75M_1 + 7,5M_2 + 2M_3 = -181,75 \quad (2)$

Στήριξη 3:  $2M_2 + 2(2 + 5)M_3 + 5M_4 = -2 \cdot 48 - 5 \cdot 11,25$   
 $2M_2 + 14M_3 + 5M_4 = -152,25 \quad (3)$

Στήριξη 4:  $5M_3 + 2(5 + 0)M_4 + 5M_4 = -5 \cdot 11,25$   
 $5M_3 + 10M_4 = -56,25 \quad (4)$

Από την (1) και (4) προκύπτουν αντίστοιχα:

$$M_1 = -0,184M_2 - 15,342 \quad (5)$$

$$M_4 = -0,5M_3 - 5,625 \quad (6)$$

Θέτοντας τώρα την τιμή της  $M_1$  από την εξίσωση (5) στη (2), παίρνουμε:

$$1,75(-0,184M_2 - 15,342) + 7,5M_2 + 2M_3 = -181,75$$

$$7,178M_2 + 2M_3 = -154,9 \quad (7)$$

ενώ αντίστοιχα, θέτοντας τη  $M_4$  από την (6) στην (3), έχουμε:

$$2M_2 + 11,5M_3 = -124,125 \quad (8)$$

Τέλος, αν από τους όρους της εξίσωσης (7) αφαιρέσουμε τους αντίστοιχους της (8) πολλαπλασιασμένους όμως επί  $(-7,178/2)$ , προκύπτει:

$$2M_3 - 11,5 \frac{7,178}{2} M_3 = -154,9 + \frac{7,178}{2} 124,125$$

$$\Rightarrow -39,274M_3 = 250,585 \quad \Rightarrow \quad M_3 = -7,4 \text{ kNm}$$

οπότε, από την (8), προκύπτει:

$$M_2 = \frac{-124,125 - 11,5(-7,4)}{2} = -19,51 \text{ kNm}.$$

Επίσης, από την (2), παίρνουμε:  $1,75M_1 + 7,5(-19,51) + 2(-7,4) = -181,75$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{146,325 + 14,8 - 181,75}{1,75} = -11,79 \text{ kNm},$$

και από την (4):  $5M_3 + 10M_4 = -56,25$

$$\Rightarrow M_4 = \frac{5 \cdot 7,4 - 56,25}{10} = -1,93 \text{ kNm}.$$

Από τις τιμές των καμπτικών ροπών στις στηρίξεις, θα προκύψουν τώρα οι τέμνουσες δυνάμεις σε χαρακτηριστικές θέσεις του φορέα: Συγκεκριμένα:

Υπολογίζονται, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση, οι τιμές των τεμνουσών δυνάμεων στις παρειές των στηρίξεων ενός ανοίγματος για το διάγραμμα Q, και επιπλέον οι ροπές ανοιγμάτων για το διάγραμμα M.

$$Q_{\alpha\rho\iota\sigma\tau} = Q_{\alpha\rho\iota\sigma\tau}^{\alpha\mu\phi\iota\epsilon\rho} + \frac{M_{\delta\epsilon\xi} - M_{\alpha\rho\iota\sigma\tau}}{L}$$

$$Q_A^{\delta\epsilon\xi} = \frac{5+5}{2} + \frac{-11,79-0}{6} = 3,04 \text{ kN}, \quad Q_B^{\alpha\rho} = 3,04 - 10 = -6,96 \text{ kN}$$

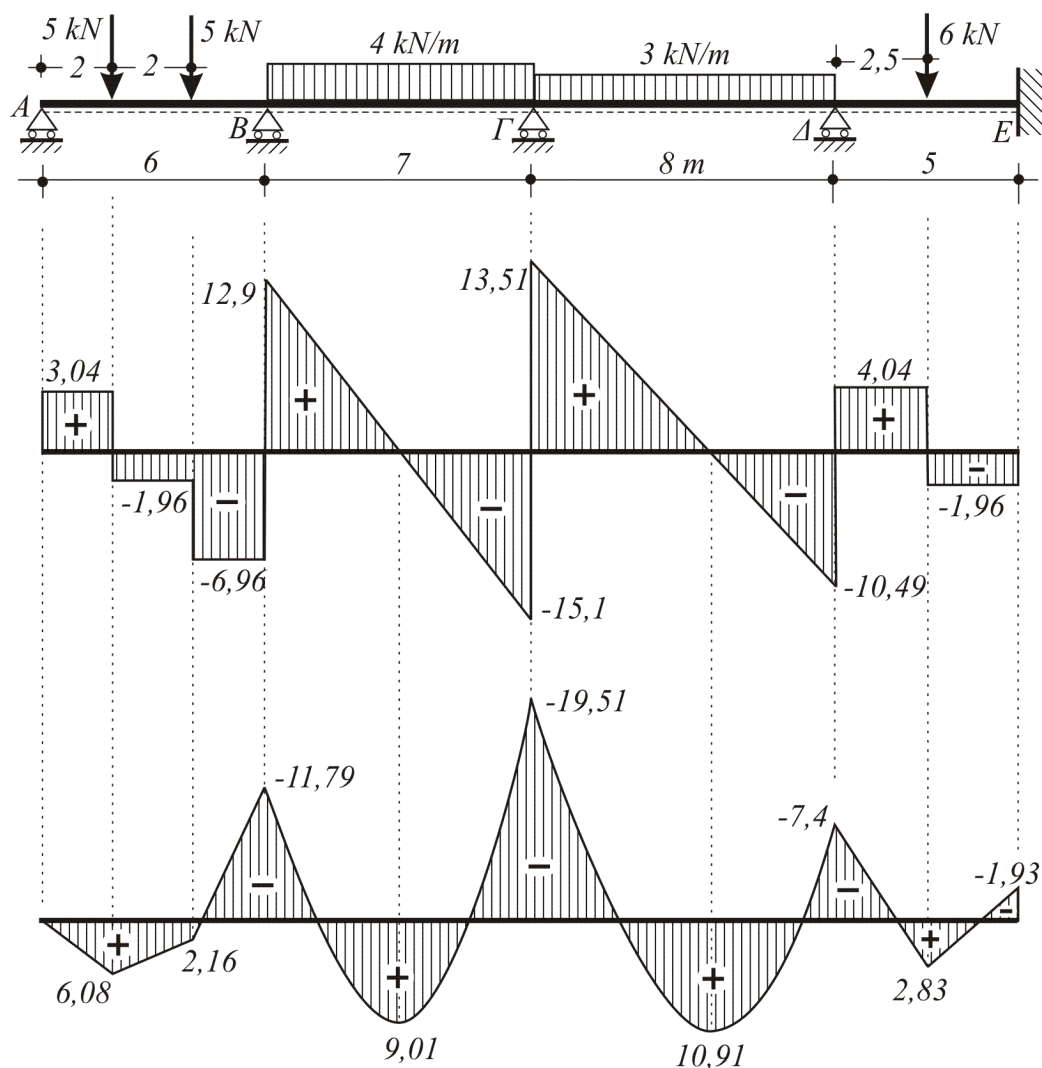
$$Q_B^{\delta\epsilon\xi} = \frac{4 \cdot 7}{2} + \frac{-19,51 - (-11,79)}{7} = 12,9 \text{ kN}, \quad Q_{\Gamma}^{\alpha\rho} = 12,9 - 28 = -15,1 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi} = \frac{3 \cdot 8}{2} + \frac{-7,4 - (-19,51)}{8} = 13,51 \text{ kN}, \quad Q_{\Delta}^{\alpha\rho} = 13,51 - 24 = -10,49 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\xi} = \frac{6}{2} + \frac{-1,93 - (-7,4)}{5} = 4,09 \text{ kN}, \quad Q_E^{\alpha\rho} = 4,09 - 6 = -1,96 \text{ kN}$$

$$M_{AB} = 3,04 \cdot 2 = 6,08 \text{ kNm}, \quad M_{B\Gamma} = -11,79 + \frac{12,9^2}{2 \cdot 4} = 9,01 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma\Delta} = -19,51 + \frac{13,51^2}{2 \cdot 3} = 10,91 \text{ kNm}, \quad M_{\Delta E} = -7,4 + 4,09 \cdot 2,5 = 2,83 \text{ kNm}.$$





### 3.4 – Η μέθοδος των δυνάμεων

#### 3.4.1 Βασικές έννοιες – ορισμοί

Είναι γνωστό ότι, όταν μια δύναμη μετακινείται πάνω στην κατεύθυνσή της, παράγει έργο, το οποίο είναι ίσο με την το γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση. Αυτό ισχύει φυσικά, όταν η δύναμη διατηρείται **σταθερή** κατά τη διάρκεια της μετατόπισης. Όμως το ίδιο δεν ισχύει, όταν, κατά τη μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της, η δύναμη μεταβάλλει την έντασή της.

Αν π.χ. θεωρήσουμε πρισματική ράβδο που θλίβεται από προοδευτικά αυξανόμενη αξονική δύναμη, το διάγραμμα 'δύναμης - μετατόπισης' είναι, στην περιοχή **αναλογίας**, ευθεία γραμμή. Το στοιχειώδες έργο που παράγεται τότε από τη δύναμη είναι:  $dW = N \cdot d\delta$ , το οποίο αποθηκεύεται με μορφή δυναμικής ενέργειας. Έτσι, αν αποφορτίσουμε τη ράβδο, η αποθηκευμένη αυτή ενέργεια απελευθερώνεται και **επαναφέρει** τη ράβδο στο αρχικό της μήκος, δίνοντας έτσι την εικόνα ότι η ράβδος συμπεριφέρεται σαν ελατήριο.

Επειδή κατά Hooke, η δύναμη είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση, δηλαδή  $N = c \cdot \delta$ , όπου  $c$  η σταθερά του ελατηρίου, ή η κλίση της ευθείας στην περιοχή αναλογίας, έπεται ότι το συνολικό έργο της εξωτερικής δύναμης, είναι:

$$W = \int_0^{\delta} N \cdot d\delta = \int_0^{\delta} c \cdot \delta \cdot d\delta = \frac{1}{2} c \cdot \delta^2 = \frac{1}{2} N \cdot \delta,$$

δηλαδή το **μισό** του έργου που παράγει η δύναμη όταν είναι **σταθερή**.

Συνεπώς όταν μια δύναμη μετακινεί το σημείο εφαρμογής της, παράγει έργο, το οποίο, εξαρτάται από το αν η τιμή της παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της μετακίνησης, ή μεταβάλλεται προοδευτικά από το μηδέν μέχρι την τελική της τιμή.

Φυσικά, ο όρος δύναμη χρησιμοποιείται εδώ ενδεικτικά, καθώς έργο μπορεί να παραχθεί και από καμπτικές ροπές, τέμνουσες ή αξονικές δυνάμεις, ακόμη και από θερμοκρασιακές μεταβολές, είτε οι δυνάμεις δρουν εξωτερικά σε έναν φορέα, είτε εσωτερικά, σαν φορτία διατομής. Στην τελευταία αυτή περίπτωση μιλάμε για έργο εσωτερικών δυνάμεων ή **έργο παραμόρφωσης**.

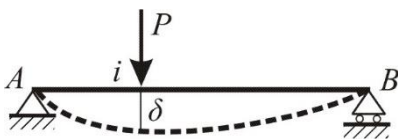
Ας δούμε τώρα διάφορες περιπτώσεις παραγωγής έργου σε έναν φορέα, που θα φανούν χρήσιμες στην κατανόηση της μεθόδου των δυνάμεων.

#### 3.4.2 Έργο εξωτερικών δυνάμεων

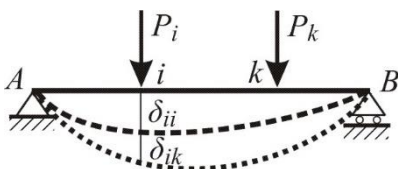
*α) Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, που γίνεται κατά τη διεύθυνσή της, προκαλείται από την ίδια τη δύναμη.*

Είναι η περίπτωση του σχήματος, όπου η δύναμη  $P$  ασκείται στη διατομή  $i$ , αυξάνοντας προοδευτικά την έντασή της από το  $0$ , με αποτέλεσμα την υποχώρηση της διατομής κατά  $\delta$ .

Τότε το παραγόμενο έργο, είναι:  $W = P \cdot \delta/2$ .



**β) Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, που γίνεται κατά τη διεύθυνσή της, προκαλείται από άλλη δύναμη.**



Είναι η περίπτωση, όπου, εφαρμόζεται αρχικά η δύναμη  $P_i$  στη διατομή  $i$  προκαλώντας, όπως πριν, υποχώρηση  $\delta_{ii}$ , και μετά, εφαρμόζεται στη διατομή  $k$  η δύναμη  $P_k$ , προκαλώντας στην ίδια διατομή,  $i$ , επί πλέον υποχώρηση  $\delta_{ik}$ . Για τη σημειολογία, ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στον **τόπο ή θέση** (τη διατομή) ενώ ο δεύτερος στο **αίτιο** (τη δύναμη).

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η δύναμη  $P_i$  **διατηρεί** την αρχική της τιμή κατά το στάδιο της **νέας** της μετακίνησης, οπότε, στο **δεύτερο** αυτό **στάδιο**, το παραγόμενο απ' αυτή έργο, είναι:  $W = P_i \cdot \delta_{ik}$ .

### 3.4.3 Έργο εσωτερικών δυνάμεων (Έργο παραμόρφωσης)

**α) Ο φορέας είναι αφόρτιστος και τα εξωτερικά φορτία αυξάνουν την έντασή τους, από 0 μέχρι την τελική τους τιμή.**

Αυτό σημαίνει ότι και οι εσωτερικές δυνάμεις του φορέα, που είναι τα φορτία διατομής, αυξάνουν αντίστοιχα την έντασή τους από 0 μέχρι την τελική τους τιμή.

Όμως το κάθε φορτίο διατομής (καμπτική ροπή, αξονική, ή τέμνουσα δύναμη) προκαλεί διαφορετικού τύπου μετακίνηση στη διατομή του φορέα.

Πχ, η **ροπή κάμψης**, που μας ενδιαφέρει περισσότερο, καθώς το **μέγιστο** ποσοστό των εσωτερικών παραμορφώσεων ενός φορέα οφείλεται στην κάμψη, **προκαλεί σχετική γωνία στροφής,  $\varphi$ , των ακραίων διατομών του φορέα** (δείτε στις σελίδες 162, 163 του Εγχειριδίου **Αντοχής Υλικών**, που μπορείτε να κατεβάσετε από τον ιστότοπο: [plokkas.users.uth.gr](http://plokkas.users.uth.gr)), η οποία γωνία, είναι:  $\varphi = M \cdot l / (E \cdot J)$ , όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και  $J$  η ροπή αδράνειας της διατομής.

Συνεπώς το έργο παραμόρφωσης που αποταμιεύεται στο φορέα κατά το στάδιο της εξωτερικής φόρτισης, θεωρώντας ότι αυτό προκύπτει σχεδόν αποκλειστικά (σε ποσοστό >90%), από καμπτικές καταπονήσεις, θα είναι αντίστοιχο με την 1<sup>η</sup> περίπτωση της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή:

$$W = \frac{1}{2} M \cdot \varphi = \frac{1}{2} M \frac{M \cdot l}{EJ} = \frac{M^2 l}{2EJ}.$$

Στην προηγούμενη σχέση, αν ο φορέας ήταν **μικτός**, δηλαδή ένα τμήμα του ήταν από δικτύωμα, θα μπορούσε να προστεθεί και ο όρος:  $S^2 \cdot l / (2E \cdot A)$  για όλο το δικτύωμα, όπου  $S$  η τάση της κάθε ράβδου χωριστά,  $l$  και  $A$  το μήκος και η διατομή της αντίστοιχα.

**β) Ο φορέας ήδη βρίσκεται υπό ένταση λόγω κάποιας άλλης φόρτισης,  $P'$ , και τα πραγματικά εξωτερικά φορτία,  $P$ , καθώς ασκούνται, αυξάνουν την έντασή τους, από 0 μέχρι την τελική τους τιμή.**

Στην περίπτωση αυτή, με σκέψεις ανάλογες, συμπεραίνουμε ότι στη σχέση που εκφράζει το έργο παραμόρφωσης, θα λείπει ο παράγων  $\frac{1}{2}$ , καθώς οι εσωτερικές γωνιακές παραμορφώσεις  $\varphi$ , γίνονται τώρα με σταθερή τη  $M'$ .

Έτσι, το έργο παραμόρφωσης γίνεται τώρα:

$$W = M' \cdot \varphi = M' \frac{M \cdot l}{EJ} = \frac{M' \cdot M \cdot l}{EJ}. \quad (\alpha)$$

Πάλι, στην προηγούμενη σχέση, αν ο φορέας ήταν **μικτός**, δηλαδή ένα τμήμα του ήταν από δικτύωμα, θα μπορούσε να προστεθεί και ο όρος:  $S' \cdot S \cdot l / (E \cdot A)$  για όλο το δικτύωμα, όπου  $S$  η τάση κάθε ράβδου,  $l$  το μήκος και  $A$  η διατομή της.

### 3.4.4 Δυνατή μετατόπιση και Δυνατό έργο

Ο όρος **δυνατή μετατόπιση**, που περιγράφεται και στις ενότητες 7.1 και 7.2, αναφέρεται σε μια ελάχιστη υποθετική μετατόπιση, η οποία όμως, μέσα στα γεωμετρικά πλαίσια μηχανισμού του φορέα, εισάγεται αυθαίρετα. Δεν είναι κάποια πραγματική υποχώρηση ή βύθιση του φορέα που προκαλείται από εξωτερικά φορτία.

Το αντίστοιχο έργο των πραγματικών δυνάμεων, που προκαλείται κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης, ονομάζεται **δυνατό έργο**.

### 3.4.5 Αρχή των Δυνατών Έργων

Ύστερα από τους παραπάνω ορισμούς, μπορεί τώρα να διατυπωθεί η αρχή που διέπει την ισορροπία ενός φορέα, κάνοντας όμως χρήση ενεργειακών όρων. «Αν ένα παραμορφώσιμο στερεό βρίσκεται σε ισορροπία, τότε για οποιαδήποτε δυνατή μετατόπιση μέσα στα γεωμετρικά πλαίσια του μηχανισμού του, το δυνατό έργο των πραγματικών δυνάμεων ισούται με μηδέν».

Η μαθηματική διατύπωση της παραπάνω αρχής μας οδηγεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι για να ισορροπεί ένα παραμορφώσιμο σώμα, θα πρέπει το άθροισμα των δυνατών έργων των εξωτερικών δυνάμεων να ισούται με την

ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος. Με άλλα λόγια το **έργο των εξωτερικών δυνάμεων** ισούται πάντα με το **έργο των εσωτερικών δυνάμεων**.

### 3.4.6 Η μέθοδος του μοναδιαίου φορτίου

Η παραπάνω αρχή των δυνατών έργων μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό π.χ. του βέλους κάμψης σε μια διατομή του φορέα.

Πράγματι, θεωρώντας π.χ. ότι η ζητούμενη υποχώρηση στη διατομή του φορέα αποτελεί μια δυνατή μετακίνησή του, **εφαρμόζουμε πάνω της ένα μοναδιαίο φορτίο**, το οποίο όμως να **ανταποκρίνεται εργικά** στην άγνωστη υποχώρηση. Αυτό σημαίνει ότι, αν το άγνωστο μέγεθος είναι **υποχώρηση**, τότε το **μοναδιαίο φορτίο** θα είναι **δύναμη**, με διεύθυνση εκείνη της υποχώρησης και αυθαίρετη φορά, η ορθότητα της οποίας θα εξαρτηθεί από το πρόσημο (+ σωστή, - λάθος) της υποχώρησης. Αν όμως το άγνωστο μέγεθος είναι **στροφή**, τότε το **μοναδιαίο φορτίο** θα είναι **ροπή**, με αυθαίρετη φορά, η ορθότητα της οποίας θα εξαρτηθεί πάλι από το πρόσημο της στροφής που θα προσδιορισθεί.

Μετά την επιβολή του μοναδιαίου φορτίου (π.χ.  $P' = 1$ ), αυτό προκαλεί εσωτερικές δυνάμεις στο φορέα, τα λεγόμενα φορτία διατομής, από τα οποία μας ενδιαφέρουν μόνον οι καμπτικές ροπές  $M'$ .

Συνεπώς, οι γωνιακές πλέον παραμορφώσεις  $\varphi$  που θα προκληθούν λόγω κάμψης στις διατομές του φορέα από την ακολουθούμενη **σταδιακή επιβολή** των εξωτερικών φορτίων, με αποτέλεσμα την υποχώρηση  $\delta$  στη θέση του  $P' = 1$ , θα γίνουν με **σταθερές** τις τιμές  $M'$  της μοναδιαίας φόρτισης. Άρα η εξίσωση του έργου εξωτερικών - εσωτερικών δυνάμεων, θα έχει τη μορφή:

$$1 \cdot \delta = M' \cdot \varphi = M' \frac{M \cdot l}{EJ} = \frac{M' \cdot M \cdot l}{EJ} \quad (\beta)$$

Συνεπώς η υποχώρηση,  $\delta$ , θα προκύψει ουσιαστικά από τον **πολ/σμό** των διαγραμμάτων  $M'$  και  $M$  (για **μοναδιαία** και **εξωτερική** φόρτιση αντίστοιχα), σε κάθε τμήμα του φορέα, διαδικασία που γίνεται με τη βοήθεια των γνωστών **γινομένων ολοκληρωμάτων Mohr**, που ακολουθούν.

### 3.4.7 Επίλυση υπερστατικού φορέα

Ένας φορέας μπορεί να είναι εσωτερικά, εξωτερικά ή εσωτερικά και εξωτερικά υπερστατικός. Ως βαθμός στατικής αοριστίας ορίζεται το πλήθος των αγνώστων μεγεθών, πέραν εκείνων που μπορούν να προσδιοριστούν από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

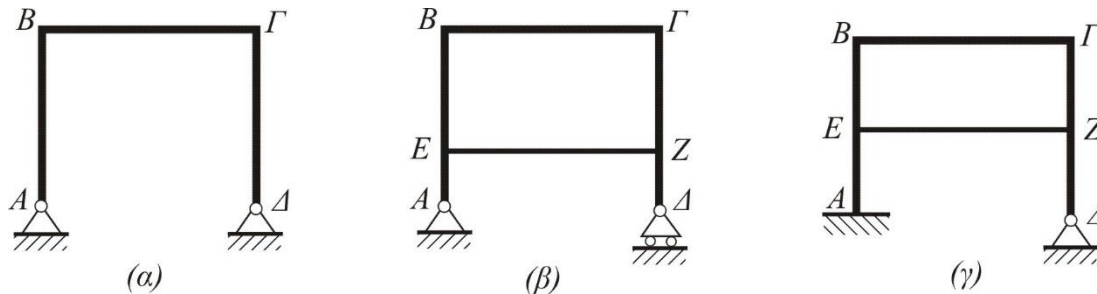
Λέμε λοιπόν ότι ένας φορέας είναι **εξωτερικά** υπερστατικός με βαθμό αοριστίας, το πλήθος των υπεράριθμων αντιδράσεών του, ενώ αντίστοιχα θα χαρακτηρίζουμε έναν φορέα **εσωτερικά** υπερστατικό από τον αριθμό των αγνώστων εσωτερικών του δυνάμεων.

Από τα υπερστατικά πλαίσια του επομένου σχήματος:

Το (α) είναι μια φορά εξωτερικά υπερστατικό με βαθμό στατικής αοριστίας:  $2+2-3 = 1$

Το (β) είναι μια φορά εσωτερικά υπερστατικό λόγω της ράβδου ΕΖ και

Το (γ) είναι 2 φορές εξωτερικά ( $3+2-3 = 2$ ) και μια φορά εσωτερικά.



Τύποι υπερστατικών πλαισίων

### Πίνακας γινομένων ολοκληρωμάτων Mohr

Οι καμπύλες είναι παραβολές βαθμού 2 <sup>ου</sup> , με κορυφές τα έντονα σημεία				
	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{L}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{2L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (M_1 + 2M_2) M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{a}{L}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (2M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{b}{L}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1 (2M_3 + M_4) + \frac{L}{6} M_2 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{b}{L}\right) M_1 M_3 + \frac{L}{6} \left(1 + \frac{a}{L}\right) M_1 M_4$	$\frac{L}{3} M_1 (M_3 + M_4)$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{3} \left(1 + \frac{ab}{L^2}\right) M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$
	$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12} (M_1 + 3M_2) M_3$	$\frac{L}{12} \left(1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$

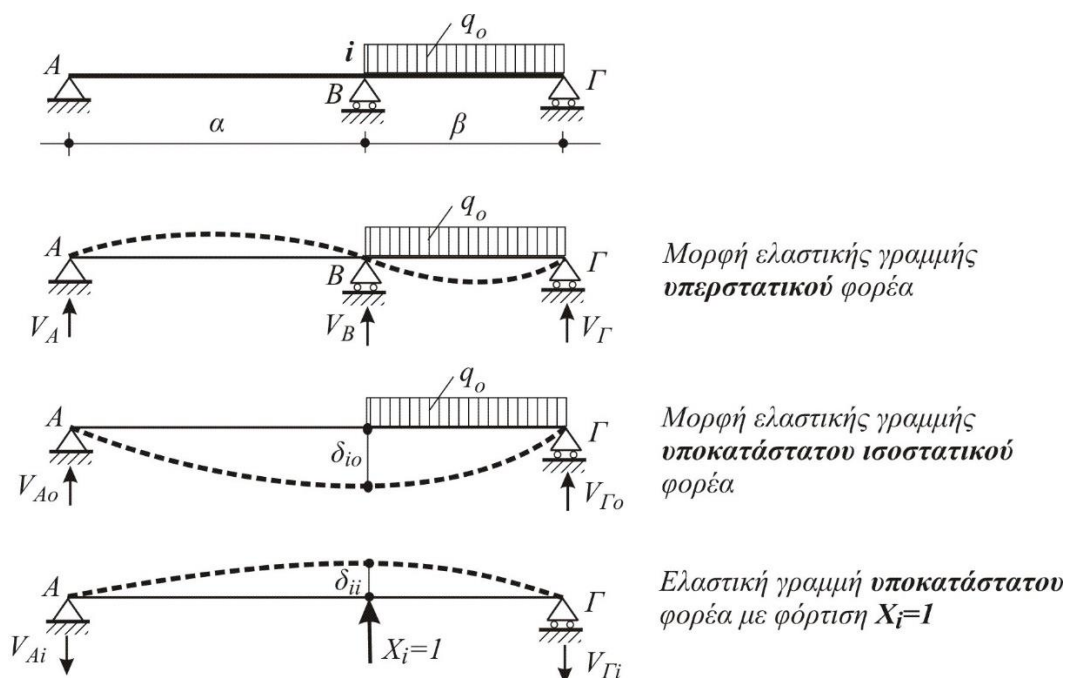
Όπως είναι γνωστό από την Αντοχή των Υλικών, σε έναν υπερστατικό φορέα, ο υπολογισμός των αντιδράσεων και γενικά των αγνώστων εντατικών μεγεθών, πέραν εκείνων που προκύπτουν από τις στερεοστατικές εξισώσεις

ισορροπίας, είναι δυνατόν να γίνει μέσα από ισάριθμες εξισώσεις, οι οποίες 'συμβιβάζουν' τις παραμορφώσεις μεταξύ τους, ακολουθώντας έναν λογικό ειρμό με μια συγκεκριμένη σκέψη.

Η μεθοδολογία θα αναπτυχθεί σε βήματα που θα παρουσιαστούν μετά, σε ένα συνθετότερο παράδειγμα. Προς το παρόν θα ασχοληθούμε με ένα απλό παράδειγμα για να κατανοήσουμε το σκεπτικό και τη φιλοσοφία της διαδικασίας.

### Παράδειγμα

Έστω, π.χ. ότι στον μια φορά υπερστατικό φορέα του σχήματος ζητείται η ενδιάμεση αντίδρασή του.



Θεωρώντας ως υπερστατικό μέγεθος την αντίδραση στη στήριξη Β, αφού την αφαιρέσουμε, ορίζουμε ως υποκατάστατο ισοστατικό φορέα (κύριο σύστημα), την αμφιέρειστη δοκό ΑΓ, με την ίδια φόρτιση, και άνοιγμα  $\alpha+\beta$ .

Λόγω της εξωτερικής φόρτισης  $q_0$ , ο ισοστατικός φορέας παρουσιάζει στη θέση  $i$  (όπου υπήρχε η στήριξη Β), μια υποχώρηση  $\delta_{i0}$ . Για τη σημειολογία τονίζουμε ξανά ότι ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη **Θέση**  $i$ , και ο δεύτερος στην **αιτία**, που είναι η εξωτερική φόρτιση  $q_0$ .

Για να αποκαταστήσουμε τώρα την ελαστική γραμμή στην αρχική της μορφή, δηλαδή εκείνη του υπερστατικού φορέα, θα πρέπει, στη θέση  $i$ , να θέσουμε τη ζητούμενη άγνωστη αντίδραση στο Β.

Αν λοιπόν στη θέση της άγνωστης αντίδρασης, θέσουμε αρχικά μια δύναμη με μοναδιαία τιμή, μπορούμε μετά, από την εξίσωση (β) της ενότητας 3.4.6, κάνοντας χρήση της **μεθόδου του μοναδιαίου φορτίου**, να υπολογίσουμε



την ελαστική υποχώρηση  $\delta_{ii}$  του φορέα (υποχώρηση στη **θέση i**, λόγω της **δύναμης  $X_i = 1$** ).

Για να επαναφέρουμε τώρα την ελαστική γραμμή του υπερστατικού φορέα στην αρχική της θέση, η μοναδιαία αυτή δύναμη πρέπει να έχει το **πραγματικό** της μέγεθος,  $X_i$ , έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω εξίσωση της ελαστικής γραμμής, ή εξίσωση **'συμβιβαστού των παραμορφώσεων'**, καθώς στη στήριξη B, δεν πρέπει να εμφανίζεται καθόλου μετακίνηση. Πρέπει λοιπόν:

$$\delta_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_i \cdot \delta_{ii} + \delta_{io} = 0 \quad (\gamma)$$

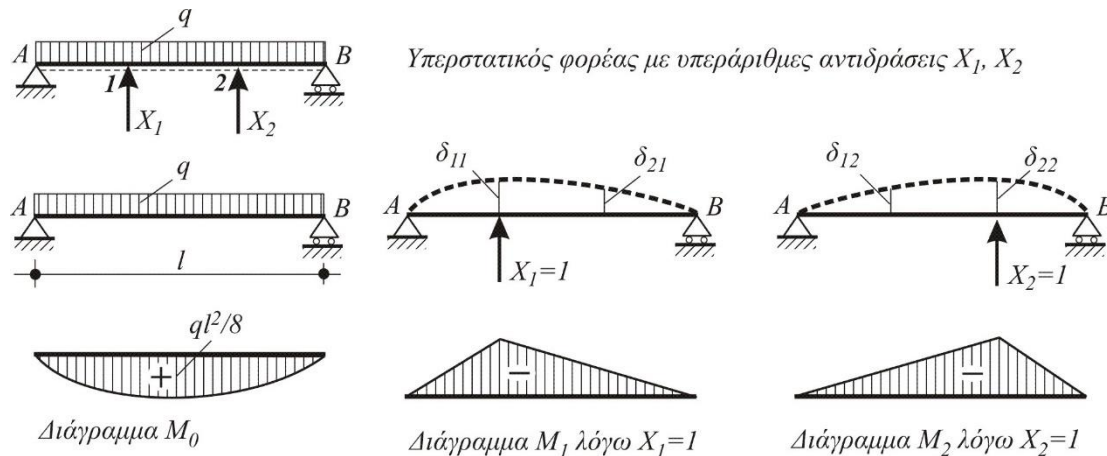
Συνεπώς το μέγεθος της άγνωστης αντίδρασης είναι:

$$X_i = -\frac{\delta_{io}}{\delta_{ii}}.$$

Οι όροι  $\delta_{ii}$  ονομάζονται **δείκτες ευκαμψίας**, ενώ αντίστοιχα οι όροι  $\delta_{io}$  ονομάζονται **φορτιστικοί όροι**.

### 3.4.8 Παράδειγμα επίλυσης με οργανωμένα βήματα

Πριν ξεκινήσουμε το επόμενο παράδειγμα είναι καλό να επεκτείνουμε το προηγούμενο και να αναφερθούμε σε έναν φορέα με 2 υπερστατικά μεγέθη (π.χ. αντιδράσεις σε ενδιάμεσες στηρίξεις 1 και 2), έστω  $X_1$  και  $X_2$ .



Όπως φαίνεται στο σχήμα, η δύναμη  $X_1=1$  δεν προκαλεί μετακίνηση μόνο στο σημείο 1 αλλά και στο σημείο 2 και αντίστροφα, δηλαδή η  $X_2=1$  προκαλεί μετακίνηση και στο 2 και στο 1.

Συνεπώς οι μετακινήσεις λόγω των τελικών δυνάμεων  $X_1$  και  $X_2$ , είναι:

- Στο σημείο 1:  $X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12}$
- Στο σημείο 2:  $X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22}$

Αν τώρα  $\delta_{10}$  και  $\delta_{20}$  είναι οι κατακόρυφες μετακινήσεις των σημείων 1 και 2 λόγω  $q$  στον **ισοστατικό** φορέα (αμφιέρειστη δοκό), **επειδή τελικά** οι

**συνολικές μετακινήσεις** στις στηρίξεις αυτές για τον **υπερστατικό** φορέα πρέπει να είναι **μηδέν**, προκύπτουν οι παρακάτω ελαστικές εξισώσεις για τα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα:

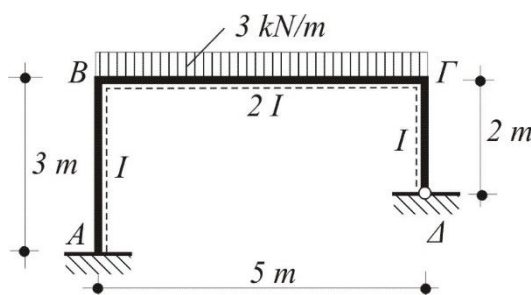
$$\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0$$

$$\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0.$$

Εννοείται ότι τόσο οι **φορτιστικοί όροι**  $\delta_{10}$  και  $\delta_{20}$ , όσο και οι **δείκτες δυσκαμψίας**  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$  και  $\delta_{22}$ , θα υπολογιστούν με **πολλαπλασιασμό** των αντιστοίχων διαγραμμάτων  $M_0$ ,  $M_1$  και  $M_2$ , (όπως υπαγορεύουν οι δείκτες του  $\delta$ ), χρησιμοποιώντας τα γινόμενα ολοκληρωμάτων **Mohr** από τους πίνακες.

### Παράδειγμα

Του εικονιζόμενου υπερστατικού πλαισίου να γίνει η επίλυση και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα  $M$  και  $Q$ .



Το πλαίσιο είναι προφανώς υπερστατικό με βαθμό στατικής αοριστίας:  $3 + 2 - 3 = 2$ .

**Βήμα 1ο:** Ορίζουμε τον υποκατάστατο **ισοστατικό** φορέα, αφαιρώντας τις 2 από τις 5 αντιδράσεις, όποιες θέλουμε. Έστω λοιπόν ότι αφαιρούμε την οριζόντια αντίδραση στο  $\Delta$  και τη ροπή πάκτωσης στο  $A$ .

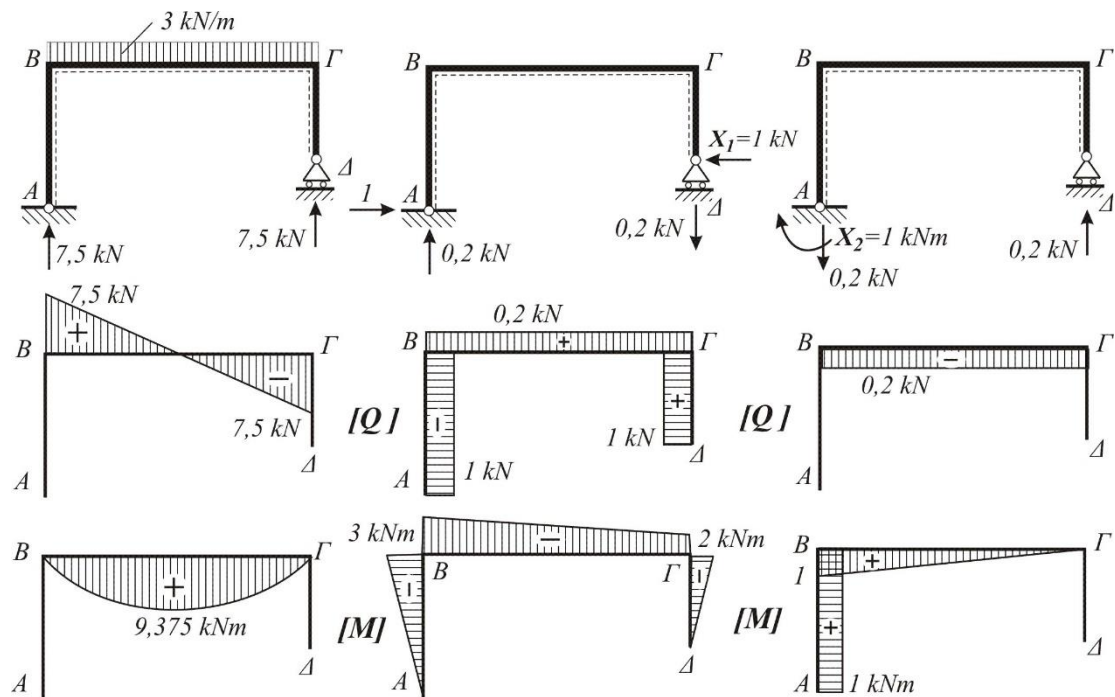
**Βήμα 2ο:** Στο **αμφιέρειστο** πλαίσιο που έμεινε, με την **υπάρχουσα** εξωτερική **φόρτιση**, υπολογίζω κατά τα γνωστά τις **αντιδράσεις**, και κατασκευάζω τα διαγράμματα **τεμνουσών** δυνάμεων και καμπτικών **ροπών**.

**Βήμα 3ο:** Αφαιρώ την εξωτερική φόρτιση από το φορέα και στη θέση της οριζόντιας (υπεράριθμης) αντίδρασης τοποθετώ τώρα μια **μοναδιαία** δύναμη, υπολογίζοντας ξανά τις **αντιδράσεις** και κατασκευάζοντας πάλι τα αντίστοιχα διαγράμματα  $Q$  και  $M$ .

**Βήμα 4ο:** Επαναλαμβάνω τη διαδικασία του 3<sup>ου</sup> βήματος τοποθετώντας στη στήριξη  $A$  μοναδιαία ροπή και προσδιορίζω ξανά τις αντίστοιχες αντιδράσεις και διαγράμματα.

Τα αποτελέσματα των βημάτων 2, 3 και 4, φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί, όπου παρουσιάζονται κατά σειράν οι 3 ισοστατικοί φορείς με τις αντίστοιχες φορτίσεις και αντιδράσεις, ενώ κάτω από τον καθένα, στοιχίζονται τα διαγράμματα  $Q$  και  $M$  με τις τιμές τους σε χαρακτηριστικές διατομές.





Εφαρμόζοντας το σκεπτικό του προηγούμενου απλού παραδείγματος, για **επαλληλία** όμως των 2 υπερστατικών μεγεθών ( $X_1$  και  $X_2$ ), πάμε στο επόμενο βήμα.

**Βήμα 5ο:** Οι εξισώσεις ελαστικότητας, ή συμβιβαστού των παραμορφώσεων, όπως αναφέρθηκε πριν από το παράδειγμα, γίνονται τώρα:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0 \quad (1)$$

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0 \quad (2)$$

Εδώ είναι:  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , διότι:  $M_1 \cdot M_2 \cdot \frac{l}{E \cdot J} = M_2 \cdot M_1 \cdot \frac{l}{E \cdot J}$

**Βήμα 6ο:** Η επίλυση του παραπάνω συστήματος θα δώσει προφανώς τις τιμές των αγνώστων  $X_1$  και  $X_2$ . Όμως, θα πρέπει προηγουμένως, να υπολογίσουμε τόσο τους συντελεστές των αγνώστων, όσο και τους γνωστούς όρους, δηλαδή με άλλα λόγια όλα τα  $\delta$ , που εδώ είναι **5 διαφορετικά!**  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$  και  $\delta_{22}$ .

Ο υπολογισμός τους θα γίνει συνδυαστικά για κάθε δείκτη χωριστά, με τη βοήθεια των γινομένων ολοκληρωμάτων του Mohr. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό π.χ.:

- του  $\delta_{10}$ , θα γίνει πολλαπλασιασμός του διαγράμματος ροπών για τον άγνωστο  $X_1$ , (1) επί το διάγραμμα ροπών για την **εξωτερική φόρτιση** (0),
- του  $\delta_{11}$ , πολλαπλασιασμός του διαγράμματος ροπών για τον άγνωστο  $X_1$  (1), επί τον **εαυτό** του,
- του  $\delta_{12}$ , πολλαπλασιασμός του διαγράμματος ροπών για τον άγνωστο  $X_1$  (1), επί το διάγραμμα ροπών για τον άγνωστο  $X_2$  (2), κ.ο.κ.

Είναι φανερό ότι ο πολλαπλασιασμός των διαγραμμάτων  $M$  θα γίνει χωριστά για κάθε τμήμα του φορέα. Όμως, αν σε κάποιο τμήμα οι τιμές του ενός έστω διαγράμματος είναι μηδενικές, τότε το τμήμα αυτό παραλείπεται.

Υπολογισμός των φορτιστικών όρων  $\delta_{10}$  και  $\delta_{20}$ .

$$\delta_{10} = \int_{B\Gamma} \frac{M_1 \cdot M_0}{E \cdot 2J} dx = \frac{1}{3} 5 \cdot 9,375 \cdot (-3 - 2) \frac{1}{2EJ} = -\frac{39,06}{EJ} m$$

$$\delta_{20} = \int_{B\Gamma} \frac{M_2 \cdot M_0}{E \cdot 2J} dx = \frac{1}{3} 5 \cdot 9,375 \cdot 1 \frac{1}{2EJ} = \frac{7,81}{EJ} m$$

Υπολογισμός των δεικτών ευκαμψίας  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  και  $\delta_{12}$ .

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_{AB} \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot J} dx + \int_{B\Gamma} \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot 2J} dx + \int_{\Gamma\Delta} \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot J} dx = \\ &= \frac{3}{3} (-3) \cdot (-3) \frac{1}{EJ} + \frac{5}{6} (-3) [2(-3) - 2] \frac{1}{E2J} \\ &\quad + \frac{5}{6} (-2) [-3 + 2(-2)] \frac{1}{E2J} + \frac{2}{3} (-2) \cdot (-2) \frac{1}{EJ} \\ &= \frac{9}{EJ} + \frac{10}{EJ} + \frac{5,83}{EJ} + \frac{2,67}{EJ} = \frac{27,5}{EJ} m \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \int_{AB} \frac{M_2 \cdot M_2}{E \cdot J} dx + \int_{B\Gamma} \frac{M_2 \cdot M_2}{E \cdot 2J} dx = 3 \cdot 1^2 \frac{1}{EJ} + \frac{5}{3} \cdot 1^2 \frac{1}{2EJ} = \frac{3,83}{EJ}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \int_{AB} \frac{M_1 \cdot M_2}{E \cdot J} dx + \int_{B\Gamma} \frac{M_1 \cdot M_2}{E \cdot 2J} dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (-3) \frac{1}{EJ} + \frac{5}{6} [2(-3) + (-2)] \cdot 1 \frac{1}{E2J} = \\ &= -\frac{4,5}{EJ} - \frac{3,33}{EJ} = -\frac{7,83}{EJ} \end{aligned}$$

**Βήμα 7ο:** Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω τιμών στο σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), αυτές γίνονται:

$$-39,06 + X_1 \cdot 27,5 - X_2 \cdot 7,83 = 0 \quad (1')$$

$$7,81 - X_1 \cdot 7,83 + X_2 \cdot 3,83 = 0 \quad (2')$$

Από την επίλυση του συστήματος, προκύπτει:

$$X_1 = 2 \text{ kN} \quad \text{και} \quad X_2 = 2,07 \text{ kNm.}$$

Τα θετικά πρόσημα δείχνουν ότι οι αρχικά, αυθαίρετα επιλεχθείσες φορές των υπεραρίθμων αντιδράσεων είναι σωστές.

**Βήμα 8ο:** Η τιμή της καμπτικής **ροπής,  $M$** , σε μια χαρακτηριστική διατομή του **υπερστατικού φορέα**, θα προσδιοριστεί τώρα λαμβάνοντας υπόψη **3 όρους** που αντιστοιχούν στην **ίδια διατομή** και των **τριών διαγραμμάτων ροπών  $M$**  του **ισοστατικού φορέα**. Συγκεκριμένα, θα ληφθεί υπόψη το **αλγεβρικό άθροισμα**:

- της ροπής που αντιστοιχεί στην **εξωτερική** φόρτιση,
- της ροπής που αντιστοιχεί στη  **$X_1$  πολλαπλασιασμένη** επί  $X_1 = 2$  και
- της ροπής που αντιστοιχεί στη  **$X_2$  πολλαπλασιασμένη** επί  $X_2 = 2,07$ .

Όμοια και αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται για να προκύψουν και οι τιμές των **τεμνουσών δυνάμεων** σε χαρακτηριστικές θέσεις του **υπερστατικού** φορέα, ακόμη και οι αντιδράσεις. Έτσι, έχουμε:

#### Αντιδράσεις

$$V_A = V_{A0} + X_1 \cdot V_{A1} + X_2 \cdot V_{A2} = 7,5 + 2 \cdot 0,2 - 2,07 \cdot 0,2 = 7,486 \text{ kN}$$

$$H_A = H_{A0} + X_1 \cdot H_{A1} + X_2 \cdot H_{A2} = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2 \text{ kN}$$

$$M_A = 2,07 \text{ kNm}$$

$$V_D = V_{D0} + X_1 \cdot V_{D1} + X_2 \cdot V_{D2} = 7,5 - 2 \cdot 0,2 + 2,07 \cdot 0,2 = 7,514 \text{ kN}$$

$$H_D = H_{D0} + X_1 \cdot H_{D1} + X_2 \cdot H_{D2} = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2 \text{ kN}$$

#### Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_A = Q_B^{\text{κάτω}} = Q_{A0} + X_1 \cdot Q_{A1} + X_2 \cdot Q_{A2} = 0 + 2 \cdot (-1) + 0 = -2 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\text{δεξιά}} = Q_{B0} + X_1 \cdot Q_{B1} + X_2 \cdot Q_{B2} = 7,5 + 2 \cdot 0,2 - 2,07 \cdot 0,2 = 7,486 \text{ kN}$$

Θέση μηδενισμού τέμνουσας:

$$0 = 7,486 - 3 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7,486}{3} = 2,495 \text{ m}$$

$$Q_{\Gamma^{\text{αρις}}} = Q_{\Gamma 0} + X_1 \cdot Q_{\Gamma 1} + X_2 \cdot Q_{\Gamma 2} = -7,5 + 2 \cdot 0,2 - 2,07 \cdot 0,2 = -7,514 \text{ kN}$$

$$Q_D = Q_{\Gamma^{\text{κάτω}}} = Q_{D0} + X_1 \cdot Q_{D1} + X_2 \cdot Q_{D2} = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2 \text{ kN}$$

#### Καμπτικές Ροπές

$$M_A = M_{A0} + X_1 \cdot M_{A1} + X_2 \cdot M_{A2} = 0 + 2 \cdot 0 + 2,07 \cdot 1 = 2,07 \text{ kNm}$$

$$M_B = M_{B0} + X_1 \cdot M_{B1} + X_2 \cdot M_{B2} = 0 + 2 \cdot (-3) + 2,07 \cdot 1 = -3,93 \text{ kNm}$$

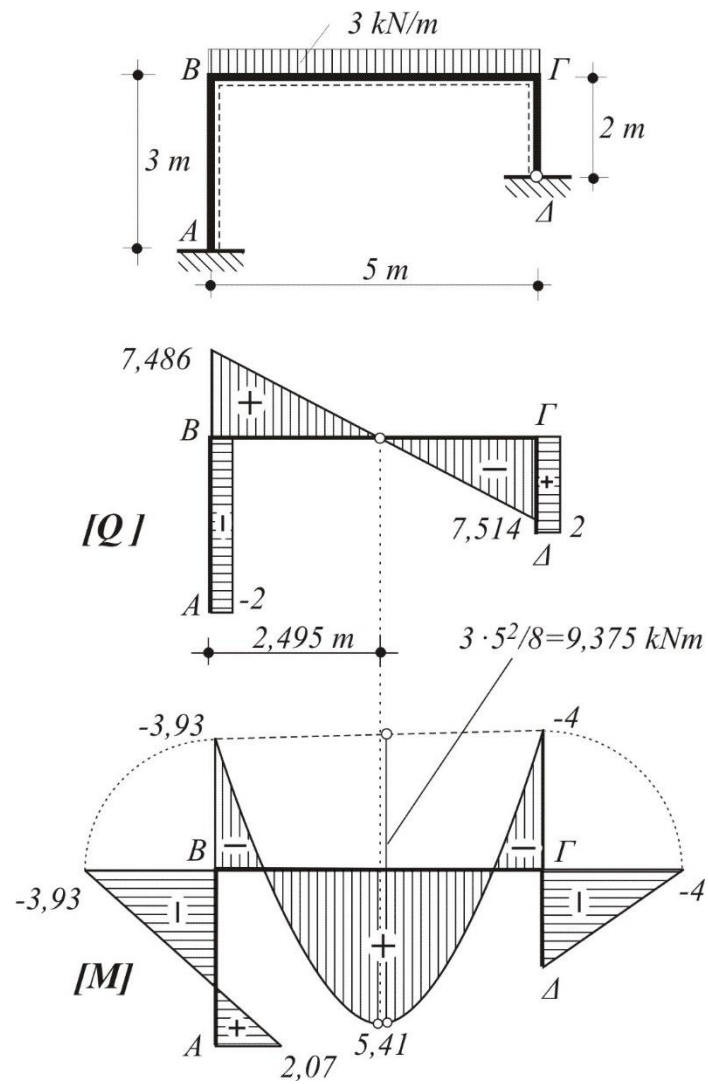
$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma 0} + X_1 \cdot M_{\Gamma 1} + X_2 \cdot M_{\Gamma 2} = 0 + 2 \cdot (-2) + 2,07 \cdot 0 = -4 \text{ kNm}$$

Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα:

$$M_{B\Gamma}^{\text{max}} = -3,93 + \frac{1}{2} 7,486 \cdot 2,495 = 5,41 \text{ kNm}$$

Ροπή στο μέσον του ανοίγματος (αναμένεται περίπου η ίδια):

$$M_{B\Gamma} = \frac{-3,93 - 4}{2} + \frac{3 \cdot 5^2}{8} = -3,965 + 9,375 = 5,41 \text{ kNm}.$$



### Επίπεδοι δικτυωτοί φορείς

Θα ονομάζουμε **δικτυωτό φορέα** ή **απλά δικτύωμα**, μια κατασκευή που αποτελείται από ράβδους οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους.

Βασικό στοιχείο των φορέων αυτών είναι οι ράβδοι, στις οποίες προέχει μόνο **μία διάσταση**, εκείνη του **μήκους**, ως προς την οποία φυσικά μπορούν να αναλάβουν φορτία.

Τα σημεία στα οποία συντρέχουν δύο ή περισσότερες ράβδοι ονομάζονται **κόμβοι** του δικτύωματος και υπολογίζονται σαν **αρθρώσεις**.

Τα εξωτερικά φορτία είναι αποκλειστικά συγκεντρωμένες δυνάμεις, και εφαρμόζονται πάντα στους κόμβους, είτε κατ' ευθείαν (άμεση φόρτιση), είτε ύστερα από μεταβίβαση (έμμεση φόρτιση).

Τα δικτύωματα είναι φορείς που συναντώνται συχνά στην πράξη σε περιπτώσεις γεφυρών, υπόστεγων και γενικά κατασκευών μεγάλων ανοιγμάτων. Ανάλογα με τη διάταξη των ράβδων τους, οι δικτυωτοί φορείς διακρίνονται:

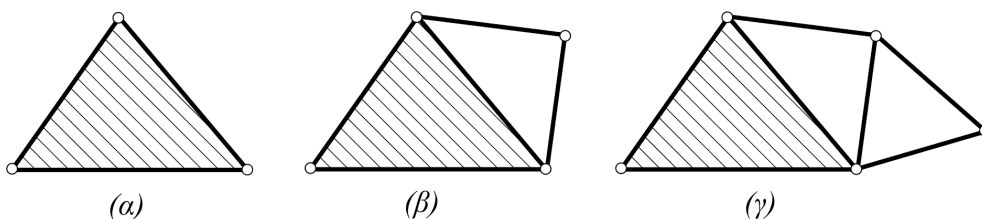
α) στους **επίπεδους**, όπου τόσο οι κόμβοι όσο και τα εξωτερικά φορτία κείνται στο ίδιο επίπεδο και

β) στους **χωρικούς**, όπου ράβδοι και φορτία έχουν τυχαία θέση στο χώρο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα **επίπεδα** δικτύωματα, με τα οποία και θ' ασχοληθούμε. Διακρίνονται σε απλά και σύνθετα.

**Απλά** είναι εκείνα που προκύπτουν από τον λεγόμενο **Θεμελιώδη τριγωνικό δίσκο** (σχήμα α), που είναι τρεις ράβδοι συνδεόμενες αρθρωτά σε τρίγωνο, αν κάθε φορά προστίθεται νέος κόμβος μέσω δύο ράβδων που δεν κείνται στην ίδια ευθεία (σχήμα β και γ).

**Σύνθετα** είναι εκείνα που προκύπτουν από τη σύνδεση δύο ή περισσότερων δίσκων, είτε κατ' ευθείαν, μέσω αρθρώσεων, είτε μέσω ράβδων που δεν είναι παράλληλες ούτε συντρέχουσες. Μπορούν ακόμη να προκύψουν και με άλλους συνθετότερους τρόπους.



Μόρφωση δικτυώματος

Επειδή κάθε ράβδος, σαν δεσμικό στοιχείο του δικτυώματος, συνδέεται αρθρωτά με τους κόμβους των άκρων της, όπου ασκούνται οι συγκεντρωμένες δυνάμεις, έπεται ότι αναλαμβάνει φορτία μόνο κατά την έννοια του μήκους της, και επομένως καταπονείται **αξονικά** (σε θλίψη ή εφελκυσμό).

Το πρόβλημα συνεπώς που εμφανίζεται στα επίπεδα δικτυώματα είναι ο προσδιορισμός της αξονικής αυτής δύναμης που αναπτύσσεται σε κάθε ράβδο, τόσο σαν ένταση όσο και σαν είδος (εφελκυσμός ή θλίψη).

Για να είναι εκμεταλλεύσιμη μια δικτυωτή κατασκευή θα πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις:

α) Να είναι **σταθερή** ή γεωμετρικά ορισμένη. Τούτο σημαίνει ότι ο αριθμός των ράβδων της θα πρέπει να είναι **ορισμένος** σε σχέση με τον αριθμό των κόμβων της. Γιατί αφαίρεση ακόμη και μιας ράβδου έχει σαν αποτέλεσμα να αποκτά **κινητότητα** ο φορέας, ή όπως θα λέμε, μετατρέπεται σε **μονοτρόχιο μηχανισμό**.

β) Να είναι **στατικά ορισμένη**, δηλαδή να είναι δυνατός ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων της. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει ο αριθμός των ράβδων του δικτυώματος να έχει **συγκεκριμένη** τιμή, που εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων του. Αν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από εκείνη, που για το φορέα είναι στατικά απαραίτητη, τότε το δικτύωμα χαρακτηρίζεται **στατικά αόριστο** με βαθμό στατικής αοριστίας τον αριθμό των πλεοναζουσών ράβδων.

Για να πληρούνται και οι δύο αυτές προϋποθέσεις, έτσι ώστε ένα απλό δικτύωμα να είναι **στατικά ορισμένο και σταθερό**, θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\rho_{\text{εσ}} + \rho_{\text{εξ}} = 2\kappa ,$$

όπου:  $\rho_{\text{εσ}}$  είναι ο αριθμός των εσωτερικών ράβδων του δικτυώματος, δηλαδή αυτές από τις οποίες αποτελείται το δίκτυωμα,

$\rho_{\text{εξ}}$  είναι ο αριθμός των εξωτερικών ράβδων, που θεωρούνται απαραίτητες για τη στήριξη του δικτυώματος και είναι πάντα τρεις (2 για άρθρωση και 1 για κύλιση) και

$\kappa$  είναι ο αριθμός των κόμβων του δικτυώματος.

Αν το δίκτυωμα είναι στο χώρο, θα πρέπει αντίστοιχα να είναι:

$$\rho_{\text{εσ}} + \rho_{\text{εξ}} = 3\kappa .$$

Για την επίλυση των δικτυωμάτων επισημαίνεται ότι:

α) το ίδιο (νεκρό) **βάρος** των ράβδων του θεωρείται **αμελητέο**.

β) Δικτυώματα που είναι γεωμετρικά **όμοια** και δέχονται **ίσες** δυνάμεις σε **αντίστοιχους** κόμβους, θα εμφανίζουν ίσες δυνάμεις και στις αντίστοιχες ράβδους. Τούτο σημαίνει ότι η ένταση των ράβδων ενός δικτυώματος δεν εξαρτάται από το πραγματικό του μέγεθος, αλλά από την ένταση των εξωτερικών φορτίων και τη γεωμετρία του.

Ο υπολογισμός της δύναμης κάθε ράβδου γίνεται για να καθοριστεί μετά η **απαραίτητη** διατομή της, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται ταυτόχρονα:

- i) **οικονομία** στο υλικό του φορέα
- ii) **ασφάλεια** στη λειτουργία του.

Για την επίλυση των επιπέδων δικτυωμάτων, δηλαδή τον προσδιορισμό των δυνάμεων που αναπτύσσονται στις ράβδους του, χρησιμοποιούνται κυρίως οι παρακάτω μέθοδοι:

1. Η **αναλυτική μέθοδος** ισορροπίας των **κόμβων**.
2. Η γραφική μέθοδος του **διαγράμματος Cremona**.
3. Η αναλυτική **μέθοδος των τομών** ή μέθοδος Ritter.

#### 4.1 – Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων

Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής γίνεται κυρίως με τη βοήθεια Η/Υ, καθώς η επίλυση 'με το χέρι' είναι περιορισμένη και εφαρμόζεται κυρίως όταν οι γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ των οι ράβδοι του δικτυώματος και τα εξωτερικά φορτία είναι τέτοιες που να δίνουν γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς (30°, 45°, 60°).

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων στις στηρίξεις του δικτυώματος, εξετάζουμε αναλυτικά την ισορροπία κάθε κόμβου του, ξεκινώντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν μέχρι δύο άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Αυτό γίνεται επειδή οι εξισώσεις που διατίθενται για να εκφράσουμε την ισορροπία κάθε κόμβου, με το σύστημα των ορθογωνίων συντεταγμένων που εγκαθιστούμε νοητά σ' αυτόν, είναι δύο:

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \quad \text{και} \quad \sum y^{\uparrow} = 0$$

Η εξίσωση  $(\sum M)^{\cdot+} = 0$  δεν έχει νόημα αφού οι δυνάμεις είναι όλες συντρέχουσες και ο κόμβος θεωρείται σαν άρθρωση.

Κατά την εισαγωγή της άγνωστης δύναμης μιας ράβδου η φορά της ορίζεται αυθαίρετα.

Το θετικό ή αρνητικό πρόσημο που προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων δηλώνει αντίστοιχα τη σωστή ή λανθασμένη επιλογή της φοράς.

**Παρατήρηση:** Όταν σε κόμβο συντρέχουν:

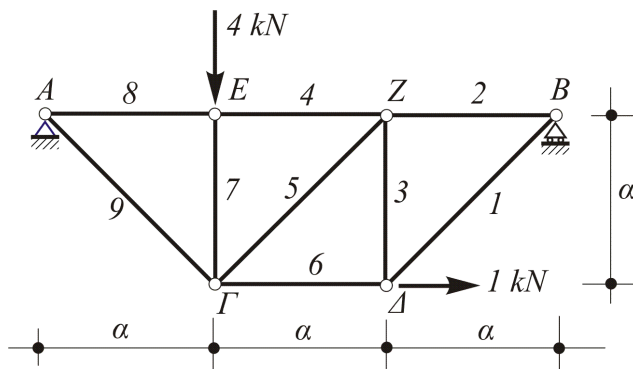
α) δύο ράβδοι ή δυνάμεις που κείνται επ' ευθείας

β) μία τρίτη ράβδος λοξή ή κάθετη προς αυτές,

τότε η δύναμη της τρίτης ράβδου είναι πάντα **μηδενική** ενώ οι άλλες δύο είναι **ίσες και αντίθετες**. Η όλη διαδικασία της μεθόδου φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

### Παράδειγμα

Του εικονιζόμενου στο σχήμα δικτυωτού φορέα, να προσδιοριστούν με την αναλυτική μέθοδο ισορροπίας των κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων του, καθώς και το είδος της κάθε μιας.



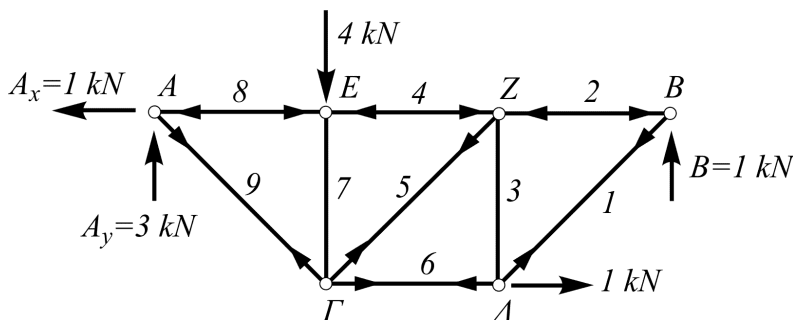
### Λύση

#### Αντιδράσεις

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 4 \cdot a - 1 \cdot a - B \cdot 3a = 0 \Rightarrow \underline{B = 1 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 4 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 1 \text{ kN}}.$$



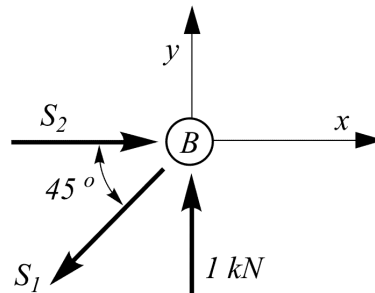
Διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το δικτύωμα



Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων και την κατασκευή του διαγράμματος ελευθέρου σώματος, ξεκινάμε, εξετάζοντας την ισορροπία του κόμβου **B**, όπου συντρέχουν **δύο** μόνον άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

### Ισορροπία κόμβου B

Σχεδιάζουμε τον κόμβο B με όλες τις γνωστές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτόν (εδώ γνωστή είναι μόνο η  $B = 1 \text{ kN}$ ), εισάγοντας π.χ. την  $S_1$  εφελκυστική και την  $S_2$  θλιπτική.



### *Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο B*

Ξεκινάμε από τη σχέση  $\Sigma y^{\uparrow+} = 0$ , για να αποφύγουμε την  $S_2$ :

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_1 \eta \mu 45^\circ = 0 \quad \text{ή} \quad S_1 = \frac{1}{0,707} = +1,41 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow S_2 - 1,41 \eta \mu 45^\circ = 0 \quad \text{ή} \quad S_2 = 1,41 \cdot 0,707 = +1 \text{ kN}$$

Επειδή τα πρόσημα που βρέθηκαν για τις δυνάμεις  $S_1$  και  $S_2$  είναι θετικά, σημαίνει ότι οι φορές που εκλέχτηκαν είναι σωστές.

Τις **σωστές** αυτές **φορές** τις **μεταφέρουμε** στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος, **δίπλα** στον κόμβο του οποίου εξετάσαμε την ισορροπία. Στη συνέχεια, σύμφωνα με την αρχή της δράσης - αντίδρασης, σημειώνουμε, στις άλλες άκρες των ράβδων που υπολογίσαμε, δίπλα από τους απέναντι κόμβους, τις **αντίθετες** φορές.

Τώρα παρατηρούμε ότι η ράβδος 1 εφελκύει τον κόμβο B, άρα και η ίδια εφελκύεται με δύναμη 1,41 kN, οπότε εφελκύει και τον απέναντι του B κόμβο Δ, με την ίδια δύναμη.

Καταγράφουμε λοιπόν στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων (που ακολουθεί στο τέλος), το εφελκυστικό αποτέλεσμα της δύναμης για τη ράβδο 1, σαν + 1,41 (kN).

Αντίθετα η ράβδος 2 θλίβει τον κόμβο B, άρα και η ίδια θλίβεται με δύναμη 1 kN, οπότε θλίβει και τον απέναντι του B, κόμβο Z, με την ίδια δύναμη.

Το νέο αυτό αποτέλεσμα καταγράφουμε στον πίνακα σαν - 1.

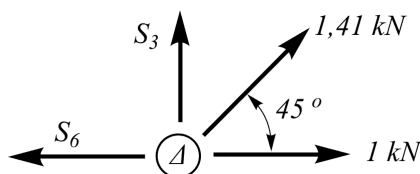
Επειδή στον κόμβο Z συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις, πηγαίνουμε υποχρεωτικά στον κόμβο Δ όπου υπάρχουν μόνο δύο και ακολουθούμε την ίδια πορεία.

#### Ισορροπία κόμβου Δ

Εδώ εισάγουμε εφελκυστικές και τις δύο άγνωστες δυνάμεις  $S_3$  και  $S_6$ , οπότε έχουμε:

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow -S_6 + 1,41 \cdot \eta\mu 45^\circ + 1 = 0 \Rightarrow \underline{S_6 = + 2 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow S_3 + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_3 = - 1 \text{ kN}}$$



*Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Δ*

Ενώ το θετικό πρόσημο της  $S_6$  σημαίνει τη σωστή εφελκυστική φορά της, το **αρνητικό** πρόσημο της  $S_3$  σημαίνει ότι η σωστή της φορά είναι **αντίθετη** της εφελκυστικής που εκλέχτηκε, δηλαδή ότι είναι **θλιπτική**.

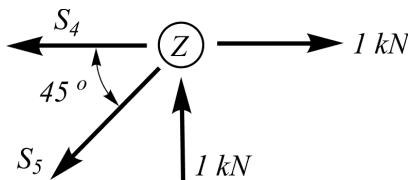
Μεταφέροντας τις σωστές φορές πλάι στον κόμβο Δ του διαγράμματος ελευθέρου σώματος και τις αντίθετές τους στους απέναντι κόμβους, μετά τη διαπίστωση του εφελκυσμού στη ράβδο 6 και της θλίψης στη ράβδο 3, καταγράφουμε στον πίνακα τα αποτελέσματα σαν + 2 και - 1 αντίστοιχα.

**Παρατήρηση:** Από την παραπάνω διεργασία γίνεται σαφές ότι, όταν αρχικά παίρνουμε μια άγνωστη δύναμη σαν εφελκυστική τότε το **πρόσημο που προκύπτει** από την επίλυση της εξίσωσης **εκφράζει κατ' ευθείαν την πραγματική εντατική κατάσταση της ράβδου**.

Το αντίθετο συμβαίνει αν αρχικά πάρουμε την άγνωστη δύναμη σαν θλιπτική.

#### Ισορροπία κόμβου Z

Όμοια, από το αντίστοιχο σχήμα έχουμε:



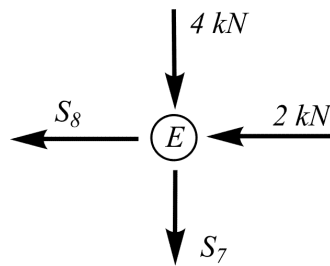
*Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Z*

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow 1 - S_5 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_5 = + 1,41 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow -S_4 - 1,41 \cdot \eta\mu 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{S_4 = - 2 \text{ kN}} .$$

Ισορροπία κόμβου Ε

Από το αντίστοιχο σχήμα έχουμε:



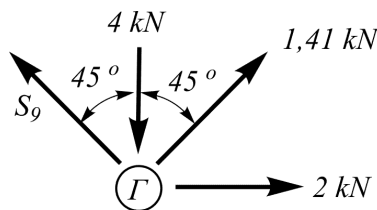
*Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Ε*

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow -S_8 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{S_8 = -2 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow -S_7 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{S_7 = -4 \text{ kN}}$$

Ισορροπία κόμβου Γ

Επειδή εδώ έχουμε μία μόνο άγνωστη δύναμη, η άλλη εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί αν επαλήθευση.



*Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Γ*

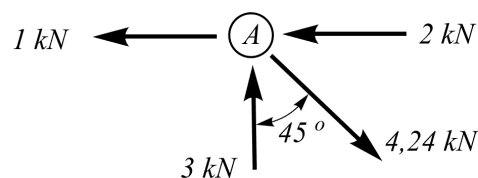
$$\begin{aligned} \sum x^{\rightarrow} = 0 &\Rightarrow -S_9 \cdot \eta\mu 45^\circ + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + 2 = 0 \\ &\Rightarrow \underline{S_9 = (1 + 2)/0,707 = +4,24 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Επαλήθευση:  $\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ - 4 + 1,41 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 3 - 4 + 1 = 0!$

Ισορροπία κόμβου Α (Επαλήθευση)

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow -1 + 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ - 2 = -1 + 3 - 2 = 0!$$

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow 3 - 4,24 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 3 - 3 = 0!$$



*Δυνάμεις που δρουν στον κόμβο Α*

Έτσι ολοκληρώθηκε η εικόνα που παρουσιάζει την εντατική κατάσταση κάθε ράβδου του δικτυώματος, με την παρατήρηση, ότι για κάθε ράβδο, η πραγματική της εντατική κατάσταση είναι **αντίθετη από αυτή που φαίνεται εκ**

πρώτης όψεως. Για παράδειγμα η ράβδος 2, ενώ φαίνεται ότι εφελκύεται, ουσιαστικά θλίβεται, επειδή όπως αναφέραμε θλίβει τους κόμβους στα άκρα της.

### Πίνακας δυνάμεων των ράβδων

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	+1,41	-1	-1	-2	+1,41	+2	-4	-2	+4,24

Η επαλήθευση που γίνεται στο τέλος δεν αποτελεί μέρος της επίλυσης του δικτυώματος και γι' αυτό δεν είναι υποχρεωτική. Όμως, όταν γίνεται, και ισχύει, δείχνει ότι τόσο οι αντιδράσεις του δικτυώματος όσο και οι δυνάμεις των ράβδων του έχουν υπολογιστεί σωστά.

Έτσι ο μελετητής αποκτά την απαραίτητη σιγουριά για τους υπολογισμούς που έκανε, ώστε να προχωρήσει μετά στο βασικό σκοπό, που είναι ο καθορισμός της διατομής κάθε ράβδου.

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για επαλήθευση, στην ουσία περίσσεψαν από τις διατιθέμενες εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του δικτυώματος, λόγω της χρήσης των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας, για τον υπολογισμό των αντιδράσεων.

Πραγματικά, σε δικτύωμα  $k$  κόμβων, αν στον αριθμό  $2k-3$  των δυνάμεων των ράβδων που πρέπει να υπολογιστούν, προσθέσουμε τις 3 δυνάμεις των ράβδων στήριξης για τις αντιδράσεις που εμφανίζονται στους ισοστατικούς φορείς, προκύπτουν συνολικά  $2k - 3 + 3 = 2k$  άγνωστες δυνάμεις, οι οποίες θα υπολογιστούν κανονικά από τις  $2k$  εξισώσεις που θα προκύψουν λόγω της ισορροπίας των  $k$  κόμβων ( $\sum x^{\rightarrow} = 0$ ,  $\sum y^{\uparrow} = 0$ ).

Ο λόγος για τον οποίο προσδιορίζουμε πρώτα τις αντιδράσεις ενός δικτυώματος είναι για να βρεθεί κόμβος που να συντρέχουν μόνο 2 άγνωστες δυνάμεις, αφού στον κόμβο της στήριξης η αντίδραση δεν παύει να είναι μια άγνωστη δύναμη.

## 4.2 – Η γραφική μέθοδος του διαγράμματος Cremona

Η μέθοδος αυτή ασχολείται ουσιαστικά με τη γραφική έκφραση της ισορροπίας του κάθε κόμβου, ενοποιώντας όμως όλα τα επί μέρους δυναμοπολύγωνα που προκύπτουν από την εργασία αυτή σε ένα, που είναι γνωστό σαν **διάγραμμα Cremona**.

Αν και γραφική, η μέθοδος αυτή οδηγεί σε γρήγορο υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων και προσφέρεται ιδιαίτερα στις περιπτώσεις, όπου, εξωτερικά φορτία και ράβδοι του δικτυώματος σχηματίζουν τυχαίες γωνίες.

Προκειμένου να εξετάσουμε γραφικά την ισορροπία ενός κόμβου όπου συντρέχουν 3 δυνάμεις εκ των οποίων η μία είναι πλήρως γνωστή ενώ οι άλλες δύο είναι γνωστές μόνο κατά διεύθυνση, κάτι που ισχύει στο δικτύωμα, αφού σχεδιάσουμε τη γνωστή δύναμη, **από τα δύο άκρα της φέρνουμε παράλληλες προς τις δύο γνωστές διευθύνσεις**, οπότε το **κλείσιμο του δυναμοτριγώνου** που προκύπτει, μας δίνει τις **φορές** και τις **εντάσεις** των δύο αγνώστων δυνάμεων.

Σημειώνεται ότι η πλήρως γνωστή δύναμη μπορεί να θεωρηθεί και σαν συνισταμένη άλλων γνωστών δυνάμεων. Συνεπώς, όπως και στην αναλυτική μέθοδο, μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, εξετάζουμε γραφικά την ισορροπία κάθε κόμβου, αρχίζοντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν **μέχρι δύο** άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σε σχέση με την αναλυτική μέθοδο, η γραφική είναι λιγότερο ακριβής, αλλά αυτή η μικρότερη ακρίβεια είναι τόσο ασήμαντη που δεν εμποδίζει καθόλου τη χρησιμοποίηση της μεθόδου από τους μελετητές, επειδή διακρίνεται για την ταχύτητα, την κομψότητα και προ παντός τη μικρή πιθανότητα λάθους, η οποία είναι αποτέλεσμα των πολλαπλών επαληθεύσεων που εμφανίζονται στην πορεία.

Στην όλη οργάνωση της μεθόδου και ιδιαίτερα στην ονομασία των δυνάμεων που προκύπτουν για κάθε ράβδο, σημαντική υπήρξε η συμβολή του **Bow** και γι αυτό η όλη εργασία είναι γνωστή και σαν μέθοδος **Bow – Cremona**.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφονται αναλυτικά τα διάφορα στάδια της μεθόδου, δίνοντας την εντύπωση ότι πρόκειται για πολύπλοκη εργασία. Όμως, μετά την απόκτηση κάποιας εμπειρίας, τα στάδια αυτά ακολουθούνται μηχανικά, με αποτέλεσμα η επίλυση του δικτυώματος, όπως προαναφέραμε, να γίνεται πολύ γρήγορα και προπαντός σίγουρα.

## Παράδειγμα

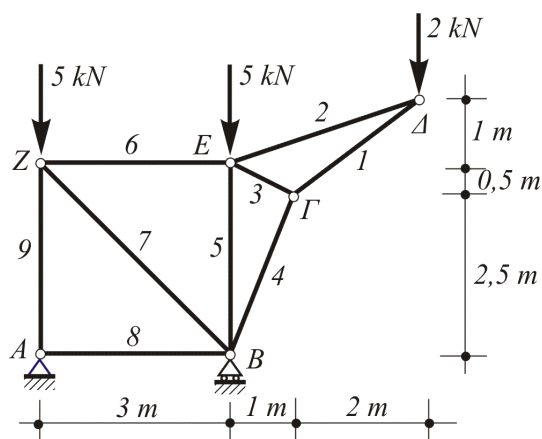
Του δικτυωτού φορέα που εικονίζεται στο σχήμα, να προσδιοριστούν γραφικά με τη μέθοδο Cremona οι δυνάμεις των ράβδων του καθώς και το είδος της κάθε μιας. Να γίνει στο τέλος και επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

## Λύση

### Αντιδράσεις

$$(\sum M)_A^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - B \cdot 3 = 0 \Rightarrow \underline{B = 9 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 5 - 5 + 9 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{A = 3 \text{ kN}}$$



Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, κατασκευάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και ακολουθούμε τις παρακάτω εργασίες.

α) Ορίζουμε μια φορά διαγραφής, π.χ. **δεξιόστροφη**, των δυνάμεων που εμφανίζονται γύρω από κάθε κόμβο. Αυτό σημαίνει ότι αν κατά την εξέταση π.χ. της ισορροπίας του κόμβου **Ε** ξεκινήσουμε την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου παίρνοντας τη δύναμη της ράβδου **2**, η επόμενη δύναμη που θα λάβουμε υπόψη, θα είναι υποχρεωτικά της ράβδου **3**, που εμφανίζεται **πρώτη δεξιόστροφα**, και όχι των 5 kN ή της ράβδου 5 ή της ράβδου 6.

β) Καλύπτοντας όλο το επίπεδο του σχήματος ονομάζουμε α, β, γ... όλες τις επιφάνειες που δημιουργούνται τόσο από τις ράβδους του δικτυώματος όσο και από τα εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις, έτσι ώστε κάθε δύναμη, αντίδραση ή ράβδος να χωρίζεται δύο επιφάνειες.

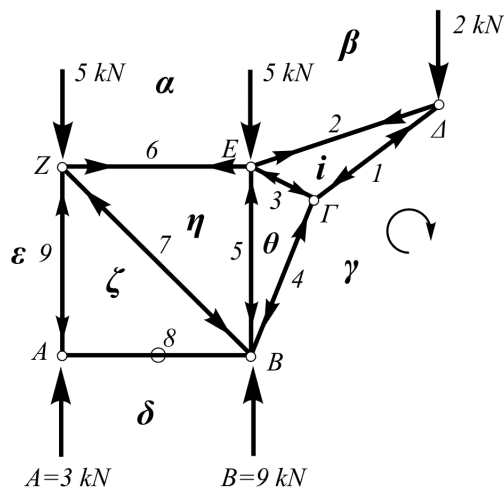
γ) Αρχίζουμε με **κόμβο όπως ο Δ**, όπου συντρέχουν δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις ράβδων και εξετάζουμε την ισορροπία του, ξεκινώντας την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου (εδώ είναι δυναμοτριγώνου), από τις **γνωστές δυνάμεις, έτσι ώστε να καταλήγουμε πάντα στις δύο άγνωστες**.

Σχεδιάζουμε λοιπόν με **συγκεκριμένη κλίμακα**, π.χ. 1 μονάδα μήκους (έστω 1 cm)  $\neq$  1 kN, (σχήμα β) τη γνωστή δύναμη των 2 kN, η οποία χαρακτηρίζεται με το διάνυσμα  $\vec{\beta\gamma}$ , διότι, περιστρεφόμενοι δεξιόστροφα γύρω από τον κόμβο Δ, προκειμένου να περάσουμε πάνω από τη δύναμη των 2 kN, πρέπει να πατήσουμε πρώτα στην επιφάνεια β και μετά στη γ.

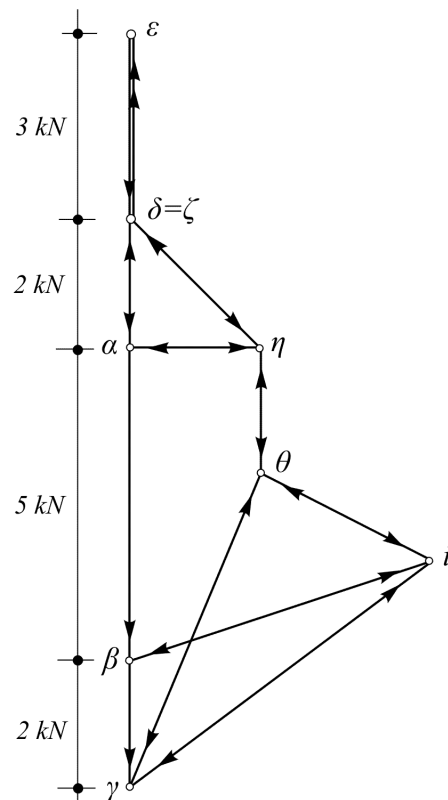
Συνεχίζοντας δεξιόστροφα συναντάμε τη ράβδο 1, που σύμφωνα με τα παραπάνω ασκεί στον κόμβο Δ τη δύναμη  $\gamma i$ , από τις επιφάνειες γ και i που διαχωρίζει.

Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona από το γ την παράλληλη της ράβδου 1 και πάνω σ' αυτή **περιμένουμε** το σημείο i.

Συνεχίζοντας τη διαδρομή συναντάμε τη ράβδο 2, που ασκεί στον κόμβο  $\Delta$  τη δύναμη  $i\beta$ .



(α) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



(β) Διάγραμμα Cremona

### Γραφική επίλυση με τη μέθοδο Cremona

Επειδή το σημείο  $i$  δεν είναι ακόμη γνωστό, φέρνουμε στο διάγραμμα από το σημείο  $\beta$  την παράλληλη της ράβδου 2, που φυσικά τέμνει την εκ του  $\gamma$  παράλληλη της 1 (που φέραμε πριν), στο σημείο  $i$ .

Μετά τον ορισμό του  $i$ , η ισορροπία του κόμβου  $\Delta$  εκφράζεται με το δυναμοτρίγωνο  $\beta\gamma i\beta$ . Για το κλείσιμό του ακολουθούμε τη διαδρομή που προκύπτει από τα ονόματα των επιφανειών που αντιστοιχούν στη δεξιόστροφη περιφορά γύρω από τις **δύο τελευταίες** άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή τη διαδρομή  $\gamma i\beta$ , βάζοντας στο δυναμοτρίγωνο τα βελάκια που δείχνουν την κίνηση στο **τέλος** της διαδρομής κάθε δύναμης.

Τα βελάκια αυτά, που εκφράζουν τις **σωστές φορές** των αγνώστων δυνάμεων, μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους (σχήμα α), **πλάι** στον κόμβο  $\Delta$ , που εξετάζουμε την ισορροπία του.

Αντίθετες φορές θέτουμε στους απέναντι του  $\Delta$  κόμβους,  $\Gamma$  και  $E$ .

Τώρα βλέπουμε (σχ. α) ότι η ράβδος 1 π.χ. **θλίβει** τον κόμβο  $\Delta$  με δύναμη, που βρίσκουμε από το διάγραμμα Cremona, αν μετρήσουμε με το υποδεκάμετρο το τμήμα  $\gamma i$  (ή  $i\gamma$ ), σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε.

Έτσι μετράμε  $\gamma\iota = 6$  μονάδες και συνεπώς στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων που ακολουθεί καταγράφουμε τη δύναμη της ράβδου 1 σαν  $-6$  kN.

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	-6	+5,1	-3,1	-5,4	-2	+2	-2,8	0	-3

Όμοια βρίσκουμε ότι η ράβδος 2 εφελκύει τον κόμβο Δ, με δύναμη  $i\beta = 5,1$  kN, την οποία καταγράφουμε σαν  $+5,1$  και ερχόμαστε στον κόμβο Γ, επειδή στον Ε υπάρχουν 3 άγνωστες δυνάμεις.

### Κόμβος Γ

Για να καταλήξουμε στις δύο άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 3 και 4 (σχ. α), ξεκινάμε τη διαδρομή μας από τη γνωστή δύναμη της ράβδου 1, που είναι τώρα η  $i\gamma$ .

Γράφουμε λοιπόν (σχήμα β) το βελάκι στο άδειο τμήμα του τελικού μήκους  $i\gamma$  (επαλήθευση), το οποίο βελάκι **επαληθεύεται** μ' εκείνο που ήδη τοποθετήσαμε στο σχήμα α, σαν αντίθετη φορά στον απέναντι του Δ κόμβο Γ.

Συνεχίζοντας δεξιόστροφα στον κόμβο Γ, συναντάμε τη ράβδο 4, που ασκεί σ' αυτόν τη δύναμη  $\gamma\theta$ . Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona από το Γ την παράλληλη της ράβδου 4 και πάνω σ' αυτή περιμένουμε το  $\theta$ .

Στη συνέχεια της διαδρομής, η ράβδος 3 ασκεί στον κόμβο τη δύναμη  $\theta i$ , οπότε από το  $i$  φέρνουμε παράλληλη της 3, ορίζοντας έτσι το σημείο  $\theta$ .

Στο δυναμοτρίγωνο  $i\gamma\theta i$ , που εκφράζει πια την ισορροπία του κόμβου Γ, διανύουμε τώρα μόνο τη διαδρομή που αντιστοιχεί στις δύο άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή τη  $\gamma\theta i$ , τοποθετώντας, στο τέλος των δυνάμεων, τα βελάκια των κατευθύνσεων της διαδρομής. Αυτά τα μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους, πλάι στον κόμβο Γ, ενώ στους απέναντι του Γ κόμβους, Ε και Β, μεταφέρουμε τις αντίθετες φορές.

Παρατηρούμε τώρα ότι οι δυνάμεις των ράβδων 4 και 3 είναι θλιπτικές. Μετρώντας στο διάγραμμα Cremona τα μήκη  $\gamma\theta$  και  $\theta i$  τις καταγράφουμε στον πίνακα με τις τιμές  $-5,4$  και  $-3,1$  αντίστοιχα.

### Κόμβος Ε

Ξεκινάμε το δυναμοπολύγωνο από τη γνωστή δύναμη  $a\beta = 5$  kN. Από το σημείο Β που έχουμε στο διάγραμμα, εύκολα ορίζουμε το α, παίρνοντας κατακόρυφα προς τα πάνω μήκος  $\beta\alpha = 5$  μονάδες.

Συνεχίζοντας την περιστροφή στον κόμβο, συναντάμε τη γνωστή δύναμη  $\beta i$  της ράβδου 2, οπότε, πηγαίνοντας στο διάγραμμα βρίσκουμε στο τέλος του



μήκους  $\beta i$  τον κενό χώρο για να βάλουμε το βελάκι της κατεύθυνσης, που επαληθεύεται μ' εκείνο που βάλαμε ήδη στο σχήμα α σαν αντίθετη φορά, από τη ισορροπία του κόμβου Δ.

Κατά τον ίδιο τρόπο επαληθεύουμε τη φορά της γνωστής δύναμης  $i\theta$  της ράβδου 3.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, από το  $\theta$  του σχ. β φέρνουμε την παράλληλη της ράβδου 5, που τέμνει την εκ του α παράλληλη της 6 στο  $\eta$ .

Καλύπτουμε στο διάγραμμα Cremona τη διαδρομή  $\theta\eta\alpha$ , θέτοντας στο τέλος κάθε κατεύθυνσης τα βελάκια, τα οποία μεταφέρουμε πλάι στον κόμβο στις ράβδους 5 και 6 και μετά τα απέναντι αντίθετά τους.

Μετρούμε στο διάγραμμα Cremona τα νέα μήκη  $\theta\eta$  και  $\eta\alpha$ , και, παρατηρώντας τον κόμβο Ε, τι παθαίνει από τις δυνάμεις των ράβδων 5 και 6, τις καταγράφουμε στον πίνακα σαν -2 και +2 αντίστοιχα.

### Κόμβος Ζ

Με παρόμοιο τρόπο τοποθετούμε στο διάγραμμα τη δύναμη  $\vec{\varepsilon a} = 5 \text{ kN}$  ορίζοντας το  $\varepsilon$ , και επαληθεύουμε τη δύναμη  $\alpha\eta$  της ράβδου 6.

Από το  $\eta$  φέρνουμε παράλληλη της 7, που τέμνει την από το Ε παράλληλη της 9 στο σημείο  $\zeta$ .

Η διαδρομή  $\eta\zeta$  ορίζει τη δύναμη -2,8 της ράβδου 7, ενώ η διαδρομή  $\zeta\varepsilon$  που είναι **διπλή** (σημειώνεται για διευκόλυνση με διπλή γραμμή), ορίζει τη δύναμη -3 της ράβδου 9.

### Κόμβος Α

Μεταφερόμενοι ήδη στον κόμβο Α περιμένουμε να συναντήσουμε το μηδενισμό της δύναμης στη ράβδο 8, σύμφωνα με το σκεπτικό της παρατήρησης της ενότητας 7.1.

Πραγματικά, τοποθετώντας στο διάγραμμα τη γνωστή αντίδραση  $A = \vec{\delta\varepsilon} = 3 \text{ kN}$ , ορίζουμε το γράμμα δ σε σημείο που ανήκει στην εκ του ε κατακόρυφη σε απόσταση 3 μονάδων προς τα κάτω. Επειδή όμως η δύναμη  $\varepsilon\zeta$  της κατακόρυφης ράβδου 9 υπολογίστηκε ήδη σε 3 kN, έπεται ότι το δ **συμπίπτει** με το ζ. Άρα η δύναμη της ράβδου 8, που εκφράζεται με το μήκος  $\zeta\delta$  (που είναι σημείο), είναι μηδενική.

### Κόμβος Β

Η διαδικασία των γραφικών ισορροπιών θα ολοκληρωθεί στον κόμβο Β με την επαλήθευση της γνωστής ήδη αντίδρασης Β, τόσο για την ένταση, όσο και για τη διεύθυνση και φορά της.

Πραγματικά, ξεκινώντας στο διάγραμμα από τη μηδενική δύναμη  $\delta\zeta$  της ράβδου 8, και επαληθεύοντας τις δυνάμεις των ράβδων 7, 5 και 4 αντίστοιχα με τα διανύσματα  $\vec{\zeta\eta}$ ,  $\vec{\eta\theta}$  και  $\vec{\theta\gamma}$ , διαπιστώνουμε ότι η ένταση  $\gamma\delta$  της αντίδρασης Β είναι όντως 9 kN (= 9 μονάδες) με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα άνω.

**Σημείωση:** Ο προσδιορισμός των αντιδράσεων, ειδικά για το δικτύωμα αυτό θα μπορούσε ν' αποφευχθεί επειδή για το ξεκίνημα της επίλυσης (γραφικής ή αναλυτικής), υπάρχει κόμβος, (ο Δ), με δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις (των ράβδων 1 και 2).

Σε τέτοιες περιπτώσεις οι αντιδράσεις **προκύπτουν** από την εξέταση ισορροπίας των κόμβων **στήριξης**, που κανονικά θα χρησιμοποιούσαμε για επαλήθευση.

### 4.3 – Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter)

Είναι δυνατόν ένα δικτύωμα να είναι στατικά ορισμένο και σταθερό, να πληρούται δηλαδή η σχέση  $r_{\epsilon\sigma} + r_{\epsilon\zeta} = 2κ$ , και όμως να παρουσιάζει προβλήματα στην επίλυσή του. Τα προβλήματα αυτά άλλοτε είναι δυνατόν να ξεπεραστούν με κάποια προσπάθεια και άλλοτε όχι.

Είναι π.χ. δυνατόν να ζητούνται οι δυνάμεις **μόνο ορισμένων** ράβδων ενός μεγάλου δικτυώματος, που βρίσκονται μακριά από τους κόμβους από όπου ξεκινάμε την επίλυση, οπότε, για να φθάσουμε στις ζητούμενες δυνάμεις των ράβδων, θα έχουμε ήδη κοπιάσει άσκοπα, πέρα από τη σημαντική πιθανότητα λάθους που αντιμετωπίζουμε ως το τέλος.

Σε άλλες πάλι περιπτώσεις είναι **αδύνατο** το ξεκίνημα της επίλυσης, επειδή σε όλους τους κόμβους συντρέχουν τουλάχιστον **τρεις** άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σε ορισμένες τέλος περιπτώσεις, ενώ ξεκινάμε κανονικά την επίλυση, φτάνουμε σε κάποιο στάδιο, όπου, η συνέχιση της επίλυσης είναι αδύνατη, επειδή σ' οποιονδήποτε επόμενο κόμβο συντρέχουν 3 άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, και όχι μόνο σ' αυτές, τη λύση δίνει η αναλυτική μέθοδος των τομών ή μέθοδος **Ritter**, από το όνομα του εφευρέτη της.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή κάνουμε μια τομή στο φορέα, χωρίζοντάς τον σε δυο τμήματα.

Στο ένα από αυτά, αφού τοποθετήσουμε τις πραγματικές αλλά άγνωστες για μας δυνάμεις, στις θέσεις των ράβδων που κόψαμε, εξετάζουμε την

ισορροπία του, χρησιμοποιώντας συνήθως τις ήδη γνωστές στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

Κατά την εκτέλεση της τομής φροντίζουμε :

- α) να μην απομονώσουμε κόμβο αλλά **τουλάχιστον τριγωνικό δίσκο**, και
- β) ο αριθμός των ράβδων που θα κόψουμε να είναι 3 ή το πολύ 4.

Ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 3, επειδή αλλιώς δε θα μπορούσαν να συνδεθούν σταθερά τα δύο τμήματα που χωρίσαμε με την τομή. Και επειδή η τομή περισσότερων ράβδων σημαίνει μεγαλύτερη δυσκολία στον υπολογισμό των δυνάμεών τους, φροντίζουμε να τις περιορίζουμε στον ελάχιστο αριθμό, δηλαδή 3.

Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν άγνωστες αντιδράσεις στο τμήμα που απομονώσαμε, ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων που κόψαμε γίνεται συνήθως αν αρχικά θεωρήσουμε το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών όλων των δυνάμεων  $(\sum M)_i^{-+} = 0$ , **ως προς το σημείο τομής  $i$  οποιωνδήποτε δύο από τις κομμένες ράβδους**. Τότε αν ο αριθμός των κομμένων ράβδων είναι:

α) τρεις, από τη σχέση  $(\sum M)_i^{-+} = 0$  βρίσκουμε κατ' ευθείαν τη μια από αυτές.

β) τέσσερις, υποχρεωτικά θ' αναζητήσουμε και μίαν άλλη εξίσωση,  $\sum x^{\rightarrow+} = 0$  ή  $\sum y^{\uparrow+} = 0$ , όπου να μην εμφανίζονται οι άγνωστες, ως προς το σημείο τομής των οποίων πήραμε το προηγούμενο αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.

Στη συνέχεια, για τις υπόλοιπες δύο δυνάμεις χρησιμοποιούμε τις στερεοστατικές εξισώσεις  $\sum x^{\rightarrow+} = 0$  ή  $\sum y^{\uparrow+} = 0$ , ή το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος ροπών ως προς άλλο σημείο.

Το μόνο πρόβλημα που συνήθως παρουσιάζεται στο αλγεβρικό άθροισμα ροπών είναι ο υπολογισμός του **μοχλοβραχίονα** κάθε δύναμης.

Στην περίπτωση που ο παραπάνω μοχλοβραχίονας είναι προφανής ή εύκολα (γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά) προσδιορίσιμος έχει καλώς. Αν όμως εμφανίζεται ιδιαίτερη δυσκολία ή πολυπλοκότητα, προσφεύγουμε στο γραφικό του προσδιορισμό, σύμφωνα με την κλίμακα που χρησιμοποιήσαμε για τη σχεδίαση του δικτυώματος.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται η περιγραφή της μεθόδου μόνο για να αντιμετωπιστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα που περιγράφεται. Η

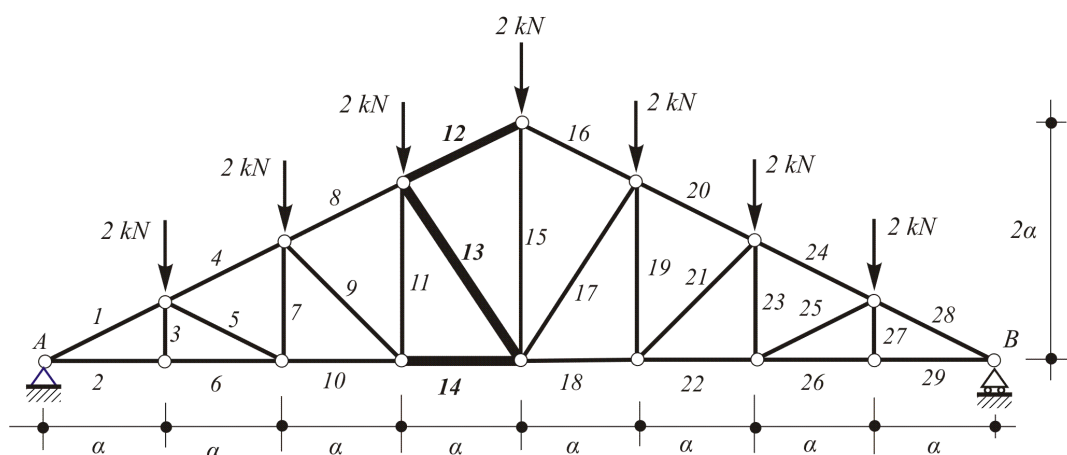
παραπέρα επίλυση του φορέα, αν ζητείται, μπορεί να γίνει κανονικά με μια από τις μεθόδους που ήδη αναφέραμε (αναλυτικά ή γραφικά).

Κατά την εξέταση της ισορροπίας του τμήματος που κόπηκε, εισάγουμε συνήθως την άγνωστη δύναμη της ράβδου με **εφελκυστική** φορά. Όπως αναφέραμε και στην αναλυτική μέθοδο ισορροπίας των κόμβων, αν το πρόσημο που θα προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης είναι θετικό, η εφελκυστική φορά που εξελέγη είναι σωστή. Στην αντίθετη περίπτωση η ένταση της ράβδου είναι θλιπτική.

## Παραδείγματα

**1**

Του επίπεδου δικτυωτού φορέα του παρακάτω σχήματος, να υπολογιστούν μόνο οι δυνάμεις των ράβδων 12, 13 και 14.

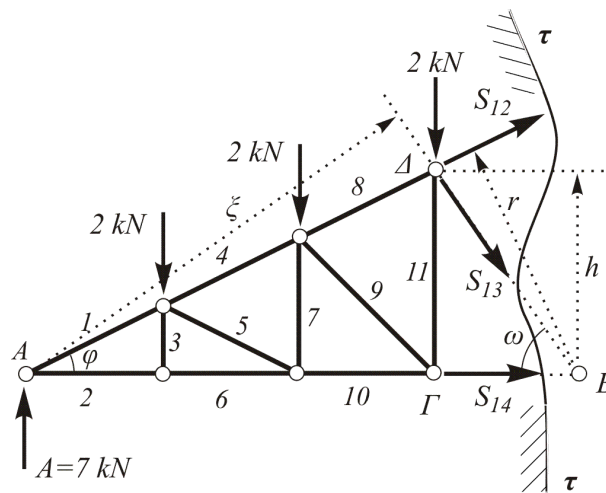


## Λύση

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που εδώ λόγω συμμετρίας είναι  $A = B = 7 \text{ kN}$ , θεωρούμε την τομή ΤΤ του επομένου σχήματος, που χωρίζει το φορέα σε δύο τμήματα, κόβοντας τις ράβδους των οποίων ζητούνται οι δυνάμεις (ή τουλάχιστον τη μια από αυτές).

Προ της τομής αυτής, ο προς τα αριστερά της ευρισκόμενος δίσκος ΑΓΔ, ισορροπεί κάτω από την επίδραση της γνωστής αντίδρασης  $A = 7 \text{ kN}$ , των τριών κατακόρυφων δυνάμεων των  $2 \text{ kN}$ , καθώς και εκείνων που αντιστοιχούν στις ράβδους 12, 13 και 14 της τομής.

Η ισορροπία του παραπάνω δίσκου εξακολουθεί να υπάρχει, εφ' όσον στις θέσεις των κομμένων ράβδων θέσουμε τις πραγματικές αλλά άγνωστες ακόμη (εσωτερικές για το δικτύωμα) δυνάμεις  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ , και  $S_{14}$ , τις οποίες εισάγουμε εφελκυστικές. Αν το πρόσημο που θα προκύψει από την επίλυση είναι αρνητικό, θα σημαίνει ότι οι δυνάμεις ασκούνται αντίθετα και θλίνουν τους αντιστοίχους κόμβους.



**Χαρακτηριστική τομή για προσδιορισμό των δυνάμεων των ράβδων 12, 13, 14**

Αν  $h$  είναι η απόσταση του  $\Delta$  (σημείου τομής των ράβδων 12 και 13) από τη ράβδο 14,  $r$  η απόσταση του  $E$  (σημείου τομής των 13 και 14) από τη 12 και  $\xi$  η απόσταση του  $A$  (σημείου τομής των 12 και 14) από τη 13, εφ' όσον ο δίσκος ισορροπεί, θα ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\sum x^+ = 0, \quad \sum y^+ = 0, \quad \text{και} \quad (\sum M)_i^+ = 0.$$

Αντί αυτών μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τρεις φορές την τελευταία εξίσωση ως προς τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $A$  αντίστοιχα, αφού οι μοχλοβραχίονες  $h$ ,  $r$  και  $\xi$  των παραπάνω σημείων ως προς τις αντίστοιχες άγνωστες δυνάμεις υπολογίζονται εύκολα τριγωνομετρικά.

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{2} = \frac{h}{3a} \Rightarrow \text{και} \quad \underline{h = 1,5a}$$

$$\varphi = 26,57^\circ \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0,447, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,894$$

$$\text{και} \quad \underline{r = 4a \cdot \eta\mu\varphi = 1,79a}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1,5a}{a} = 1,5 \Rightarrow \omega = 56,31^\circ, \quad \eta\mu\omega = 0,832, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = 0,555$$

$$\text{και} \quad \underline{\xi = 4a \cdot \eta\mu\omega = 3,33a}$$

Έτσι θα έχουμε:

$$(\sum M)_\Delta^+ = 0 \Rightarrow 7 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a - S_{14} \cdot 1,5a = 0$$

$$S_{14} = \frac{21 - 4 - 2}{1,5} = 10 \text{ kN}$$

$$(\sum M)_E^+ = 0 \Rightarrow 7 \cdot 4a - 2 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a + S_{12} \cdot 1,79a = 0$$

$$S_{12} = -\frac{28 - 6 - 4 - 2}{1,79} = -8,94 \text{ kN}$$

$$\left(\sum M\right)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \alpha + 2 \cdot 2a + 2 \cdot 3\alpha + S_{13} \cdot 3,33a = 0$$

$$S_{13} = -\frac{2+4+6}{3,33} = -3,6 \text{ kN}$$

Τώρα μπορούμε απλά να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \text{ και } \sum y^{\uparrow+} = 0,$$

που θα μπορούσαμε άλλωστε να χρησιμοποιήσουμε από πριν σαν σύστημα για τον προσδιορισμό των δυνάμεων  $S_{12}$  και  $S_{13}$ .

$$\sum x^{\rightarrow+} = 10 - 3,6 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 8,94 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 10 - 2 - 8 = 0!$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 7 - 2 - 2 - 2 - 8,94 \cdot \eta\mu\varphi + 3,6 \cdot \eta\mu\omega = 1 - 3,99 + 2,99 = 0!$$

### Σημείωση

Το γεγονός ότι ο φορέας είναι στατικά ορισμένος και σταθερός ( $29 + 3 = 2 \cdot 16$ ), σε συνδυασμό επίσης με το γεγονός ότι στις στηρίξεις Α και Β εμφανίζονται δύο μόνον άγνωστες δυνάμεις, σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε και μια από τις προηγούμενες μεθόδους. Κάνοντας την τομή, απλά αποφεύγουμε τον επί πλέον **χρόνο και κόπο** καθώς και την **πιθανότητα λάθους**, ώσπου να φτάσουμε διαδοχικά στις ζητούμενες δυνάμεις.

### Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του

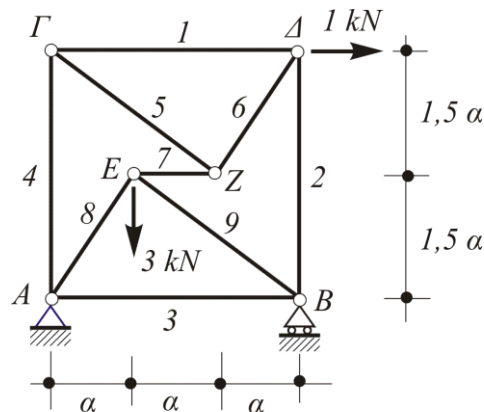
Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Δύν (kN)	-15,65	14	0	-13,42	-2,24	14	1	-11,18	-2,83	12	2

Ράβδος	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Δύν (kN)	-8,94	-3,61	10	6	-8,94	-3,61	10	2	-11,18	-2,83

Ράβδος	22	23	24	25	26	27	28	29	Αντιδράσεις	
									A	B
Δύν (kN)	12	1	-13,42	-2,24	14	0	-15,65	14	7	7

2

Να αντιμετωπιστεί η επίλυση (γραφική ή αναλυτική) του επίπεδου δικτυωτού φορέα που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



### Λύση

Το παραπάνω δικτύωμα είναι σύνθετο. Αποτελείται από τους δίσκους ΓΔΖ και ΑΒΕ οι οποίοι συνδέονται με τρεις απλές ράβδους που δεν είναι συντρέχουσες.

Είναι στατικά ορισμένο και σταθερό, διότι ισχύει η σχέση:

$$\rho_{\varepsilon\sigma} + \rho_{\varepsilon\zeta} = 2\kappa, \quad \text{δηλαδή} \quad 9 + 3 = 2 \cdot 6$$

Οι αντιδράσεις υπολογίζονται εύκολα από τις γνωστές στερεοστατικές εξισώσεις:

$$(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 3\alpha + 3 \cdot \alpha - B \cdot 3\alpha = 0 \Rightarrow B = 2 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 3 + 2 = 0 \Rightarrow A_y = 1 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 1 = 0 \Rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$

Στο παραπάνω δικτύωμα, για την αντιμετώπιση της λύσης, έτσι ώστε να προκύψουν οι δυνάμεις των ράβδων του όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, επειδή σε κάθε κόμβο συντρέχουν **τρεις** ράβδοι, δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων ούτε το διάγραμμα Cremona.

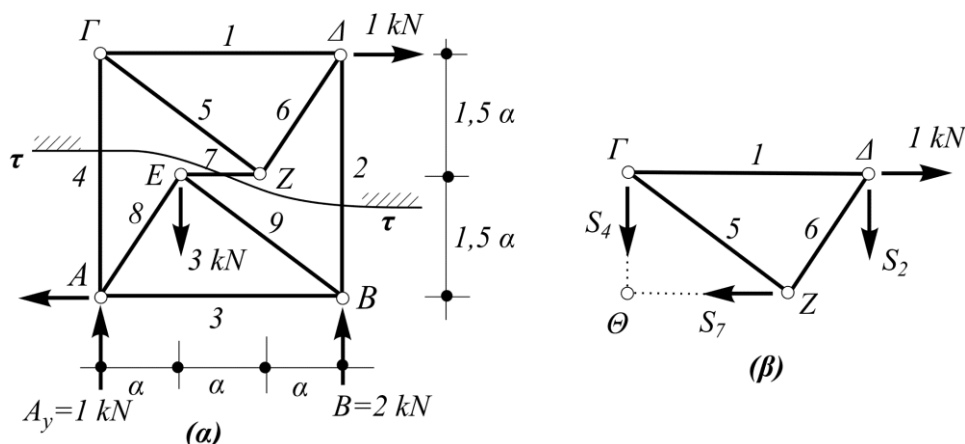
Αναγκαστικά λοιπόν χρησιμοποιούμε τομή ττ (σχ. α), που τέμνει τις τρεις ράβδους σύνδεσης των δύο δίσκων.

Έτσι απομονώνουμε τον επάνω δίσκο ΓΔΖ (σχ. β) και εξετάζουμε την ισορροπία του, κάτω από την επίδραση των δυνάμεων 1 kN,  $S_2$ ,  $S_4$  και  $S_7$ , τις οποίες εισάγουμε εφελκυστικές.

$$(\Sigma M)_{\Theta}^{\perp+} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1,5\alpha + S_2 \cdot 3\alpha = 0 \Rightarrow S_2 = -0,5 \text{ kN}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = -S_4 + 0,5 = 0 \Rightarrow S_4 = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_7 = 0 \Rightarrow S_7 = 1 \text{ kN}.$$



#### Χαρακτηριστική τομή και διάγραμμα του άνω ελευθέρου σώματος

Μετά τον υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων 2, 4 και 7, ή έστω και μίας εξ αυτών, συνεχίζουμε εξετάζοντας την ισορροπία κάθε κόμβου (αναλυτικά ή γραφικά).

#### Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	0,67	-0,5	0,67	0,5	-0,83	0,6	1	0,6	-0,83

#### Σημείωση:

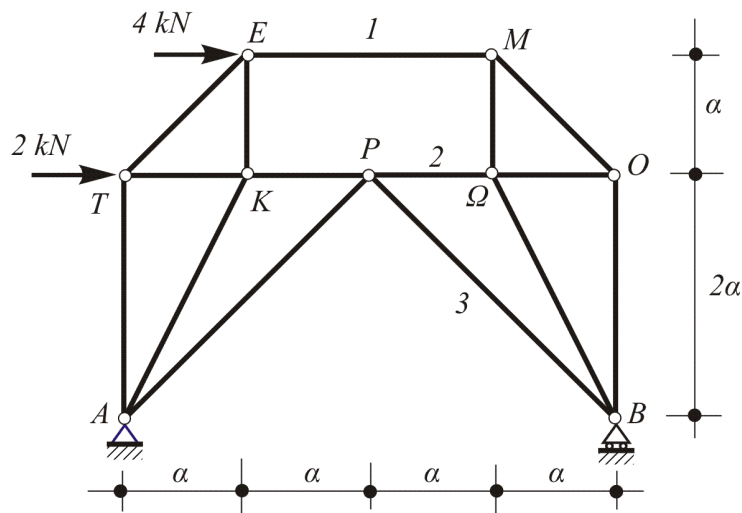
Ο υπολογισμός των αντιδράσεων εδώ δεν ήταν απαραίτητος, επειδή για την ισορροπία του παραπάνω δίσκου οι αντιδράσεις δεν εμφανίστηκαν πουθενά. Έγινε για την περίπτωση που εξεταζόταν η ισορροπία του κάτω δίσκου ΑΒΕ, αλλά και για να αποδειχθεί το αδύνατο της επίλυσης με γραφική ή αναλυτική μέθοδο.



**3** Του σύνθετου επίπεδου δικτυώματος του σχήματος, να αντιμετωπιστεί, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η αναλυτική ή γραφική του επίλυση.

### Λύση

Ακολουθεί παρόμοια και αντίστοιχη διαδικασία μ' εκείνη που ακολουθήθηκε ήδη στο προηγούμενο παράδειγμα.



Το παραπάνω δικτύωμα είναι στερεό, αφού αποτελείται από τους δίσκους ΑΡΚΕΤΑ και ΒΡΩΜΟΒ που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της άρθρωσης Ρ και της ράβδου ΕΜ. Άλλωστε ισχύει και η σχέση  $\rho_{εσ} + \rho_{εζ} = 2κ$ , αφού  $15 + 3 = 2 \cdot 9$ .

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων, ευχερής όπως και προηγουμένως, δίνει:

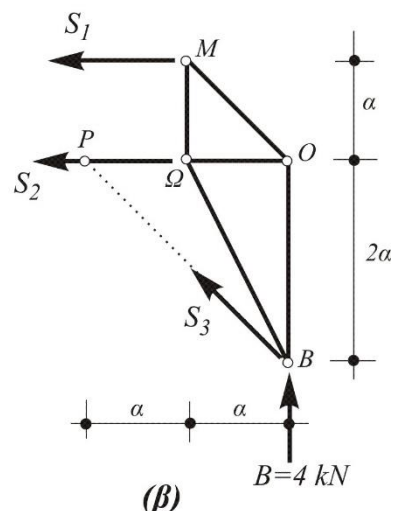
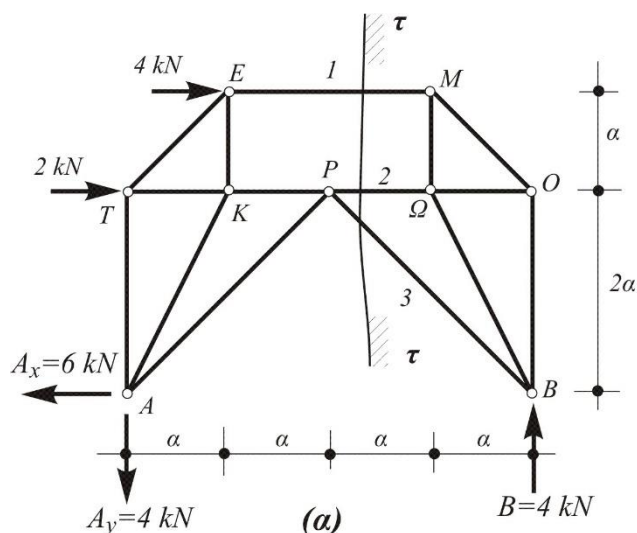
$$(\sum M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2\alpha + 4 \cdot 3\alpha - B \cdot 4\alpha = 0 \Rightarrow B = 4 \text{ kN}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = -A_y + 4 = 0 \Rightarrow A_y = 4 \text{ kN}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -A_x + 2 + 4 = 0 \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN}.$$

Ωστόσο, ούτε το διάγραμμα Cremona ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας κόμβων οδηγεί σε προσδιορισμό δύναμης οποιασδήποτε ράβδου.

Προσφεύγουμε λοιπόν στην τομή ττ (σχ. α), που τέμνει τις ράβδους 1, 2 και 3. Έτσι απομονώνεται ο δίσκος ΒΩΜΟΒ (σχ. β), στον οποίο ασκούνται η αντίδραση  $B = 4 \text{ kN}$  και οι δυνάμεις  $S_1$ ,  $S_2$  και  $S_3$  που εισάγονται εφελκυστικές. Έτσι έχουμε:



**Χαρακτηριστική τομή και διάγραμμα του δεξιού ελευθέρου σώματος**

$$(\Sigma M)_P^{\leftarrow+} = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot \alpha - 4 \cdot 2\alpha = 0 \Rightarrow S_1 = -8 \text{ kN}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 4 + S_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{4}{0,707} = -5,657 \text{ kN}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 8 - S_2 + 5,657 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_2 = 8 + 4 = 12 \text{ kN}.$$

Μετά τον προσδιορισμό της  $S_3$  ή  $S_1$ , ο υπολογισμός του δικτυώματος με την αναλυτική ή γραφική μέθοδο είναι δυνατός, αφού μπορούμε να ξεκινήσουμε από τον κόμβο B ή M αντίστοιχα και να συνεχίσουμε κανονικά.

### Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του.

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7
Δύναμη (kN)	-8	-12	-5,66	8,94	-8	-4	4,47

Ράβδος	8	9	10	11	12	13	14	15
Δύναμη (kN)	5,66	2	4	8	-5,66	4	8	-11,31

**4**

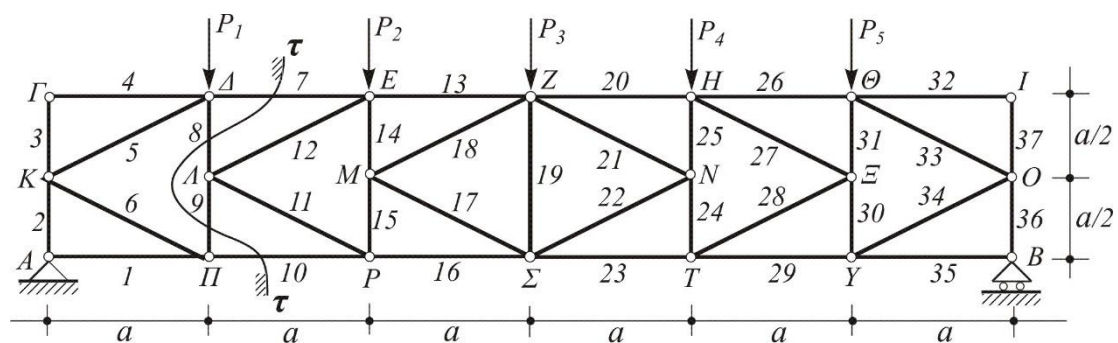
Του επίπεδου δικτυώματος τύπου « Κ » του σχήματος, να εξεταστεί η επίλυσή του γραφικά ή αναλυτικά.

### Λύση

Ολοκληρώνουμε την ανάπτυξη της μεθόδου των τομών με το παραπάνω δικτύωμα τύπου « Κ », το οποίο, όπως και τα προηγούμενα, είναι στατικά ορισμένο και σταθερό ( $37 + 3 = 2 \cdot 20$ ).

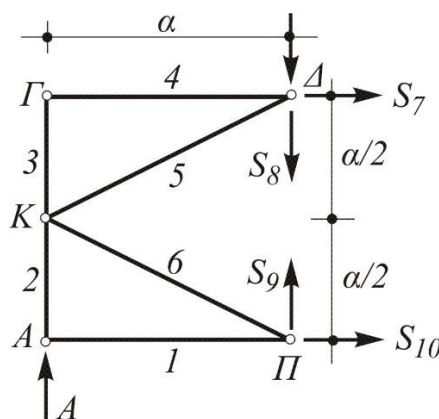
Παρατηρούμε ότι, μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία, το διάγραμμα Cremona αρχίζει κανονικά, π.χ. από τον κόμβο Α, υπολογίζοντας τις δυνάμεις των ράβδων 1, 2 και στη συνέχεια των των ράβδων 3 και 4 του κόμβου Γ.

Όμως, ήδη από τον κόμβο Π και μετά, είναι αδύνατη η συνέχιση του υπολογισμού των δυνάμεων των ράβδων, επειδή τόσο σ' αυτόν όσο και στους ανάλογους μ' αυτόν κόμβους Δ, Θ και Υ συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις ράβδων.



Προσφεύγουμε λοιπόν υποχρεωτικά στην τομή ττ, εξετάζοντας την ισορροπία του αριστερού τμήματος. Θεωρώντας εφελκυστικές τις δυνάμεις των ράβδων 7, 8, 9 και 10 που κόψαμε, θα έχουμε:

$$(\Sigma M)_{\Delta}^{+} = 0 \Rightarrow A \cdot \alpha - S_{10} \cdot a = 0 \Rightarrow S_{10} = A$$



$$\Sigma x^+ = 0 \Rightarrow S_7 + S_{10} = 0 \Rightarrow S_7 = -S_{10} = -A$$

Επαναλαμβάνοντας όμοια διαδικασία και σε 'δεξιότερη' τομή, μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση του δικτυώματος, φτάνοντας ως το μέσον του (κόμβοι Ζ και Σ), των οποίων την ισορροπία θα εξετάσουμε αφού κάνουμε επί πλέον κατακόρυφες τομές εκατέρωθεν αυτών, για να συνεχίσουμε, ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία υπολογισμών προς το άλλο άκρο του φορέα.

### Πίνακας δυνάμεων ράβδων

Για διευκόλυνση του σπουδαστή στην προσπάθεια επίλυσης ολοκλήρου του δικτυώματος, παρατίθεται ο πίνακας δυνάμεων όλων των ράβδων του.

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (kN)	0	-5,83	0	0	-6,52	6,52	-5,83	1,92	-2,93

Ράβδος	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Δύναμη (kN)	5,83	5,4	-5,4	-10,67	0,42	-2,42	10,67	3,17	-3,17

Ράβδος	19	20	21	22	23	24	25	26
Δύναμη (kN)	-1,5	-13,33	-0,19	0,19	13,33	-2,08	-1,92	-9,17

Ράβδος	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Δύναμη (kN)	-4,66	4,66	9,17	-4,58	-0,42	0	-10,25	0	10,25

Ράβδος	36	37	Αντιδράσεις	A	B
Δύναμη (kN)	-9,17	0	Δύναμη (kN)	5,83	9,17

### Τριαρθρωτοί φορείς

Τριαρθρωτός φορέας ή **τριαρθρωτό τόξο** ονομάζεται κάθε επίπεδη κατασκευή που αποτελείται από δυο στερεά τμήματα τα οποία συνδέονται με **άρθρωση** τόσο μεταξύ τους όσο και με το έδαφος.

Ανάλογα με το είδος των στερεών τμημάτων του φορέα διακρίνουμε τους **ολόσωμους** και τους **δικτυωτούς** φορείς.

Οι τριαρθρωτοί φορείς αν και στηρίζονται με δύο αρθρώσεις στο έδαφος, παρουσιάζοντας έτσι 4 άγνωστες αντιδράσεις, ανήκουν στους **ισοστατικούς** φορείς.

Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών που αναπτύσσονται σε τυχούσα διατομή, ενδιαφέρον παρουσιάζει κυρίως ο υπολογισμός των αντιδράσεων.

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό που παρουσιάζουν οι ολόσωμοι τριαρθρωτοί φορείς είναι ότι οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στις διατομές τους είναι αρκετά **μικρότερες** από εκείνες που παρουσιάζονται στις απλές ολόσωμες δοκούς που χρησιμοποιούνται για την κάλυψη του ίδιου ανοίγματος με τα **ίδια εξωτερικά φορτία**. Σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις, όπου είναι δυνατόν να δοθεί συγκεκριμένη **παραβολική μορφή** στο φορέα, είναι δυνατός ο **μηδενισμός** των καμπτικών ροπών σ' όλο το μήκος του φορέα!

Είναι επομένως οι τριαρθρωτοί φορείς γενικά οικονομικότεροι των συνήθων δοκών, αλλά μόνο σε κατασκευές μεγάλων ανοιγμάτων. Και τούτο διότι ένα σημαντικό κόστος ενός τριαρθρωτού φορέα προβλέπεται για την εξασφάλιση της σωστής στατικής λειτουργίας των τριών αρθρώσεων του.

#### 5.1 – Υπολογισμός των αντιδράσεων

Για τυχούσα εξωτερική φόρτιση του τριαρθρωτού φορέα, σε κάθε μία από τις στηρίξεις των αρθρώσεων Α και Β, αναπτύσσεται γενικά μία αντίδραση, που αναλύεται σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα. Έτσι προκύπτουν συνολικά οι συνιστώσες  $V_A$ ,  $H_A$  και  $V_B$ ,  $H_B$ .

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό των τεσσάρων αυτών αντιδράσεων, σχηματίζουμε τις τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$(\sum M)^{\perp+} = 0, \quad \sum y^{\uparrow+} = 0, \quad \sum x^{\rightarrow+} = 0,$$

και επί πλέον μια τέταρτη εξίσωση, από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών στη θέση της άρθρωσης  $\Gamma$ , είτε για το αριστερό είτε για το δεξιό τμήμα:

$$(\sum M)_{\alpha\rho\iota\sigma\tau.}^{\perp+} = 0 \quad \text{ή} \quad (\sum M)_{\delta\epsilon\zeta.}^{\perp+} = 0 ,$$

σχηματίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών μόνο των αριστερά ή δεξιά του  $\Gamma$  ευρισκομένων δυνάμεων.

Συνήθως συμφέρει ν' αρχίσουμε από την εξίσωση αυτή και στη συνέχεια να καταλήγουμε στις στερεοστατικές. Συγκεκριμένα:

α) Αν οι στηρίξεις είναι στο ίδιο επίπεδο (**ισοϋψείς**), η εξίσωση  $(\sum M)_A^{\perp+} = 0$ , θα μας δώσει κατ' ευθείαν την  $V_B$ , ενώ μετά η  $(\sum M)_{\delta\epsilon\zeta.}^{\perp+} = 0$  θα μας δώσει την  $H_B$ .

Στη συνέχεια, οι εξισώσεις  $\sum x^+ = 0$  και  $\sum y^{\uparrow+} = 0$ , θα μας δώσουν αντίστοιχα τις υπόλοιπες  $H_A$  και  $V_A$ .

β) Αν οι στηρίξεις είναι **ανισοϋψείς**, το **σύστημα** των εξισώσεων

$$(\sum M)_{\delta\epsilon\zeta.}^{\perp+} = 0 \quad \text{και} \quad (\sum M)_A^{\perp+} = 0 ,$$

θα μας δώσει τις αντιδράσεις  $H_B$  και  $V_B$ . Μετά την επίλυσή του, ακολουθείται η ίδια με τις ισοϋψείς πορεία για τις  $H_A$  και  $V_A$  ( $\sum x^+ = 0$ ,  $\sum y^{\uparrow+} = 0$ ).

## 5.2 – Υπολογισμός της έντασης

Μετά τον προσδιορισμό των αντιδράσεων, ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  σε κάθε διατομή γίνεται βάσει του ορισμού, μέσω των αριστερά (ή δεξιά) της διατομής ευρισκομένων δυνάμεων (φορτίων και αντιδράσεων).

Αν ο φορέας έχει καμπύλο άξονα τότε καταφεύγουμε στις σχέσεις:

$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma^o} - H \cdot y_{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$Q_{\Gamma} = Q_{\Gamma^o} \sigma\upsilon\nu\phi - H \eta\mu(\phi - \alpha)$$

$$N_{\Gamma} = -Q_{\Gamma^o} \eta\mu\phi - H \sigma\upsilon\nu(\phi - \alpha)$$

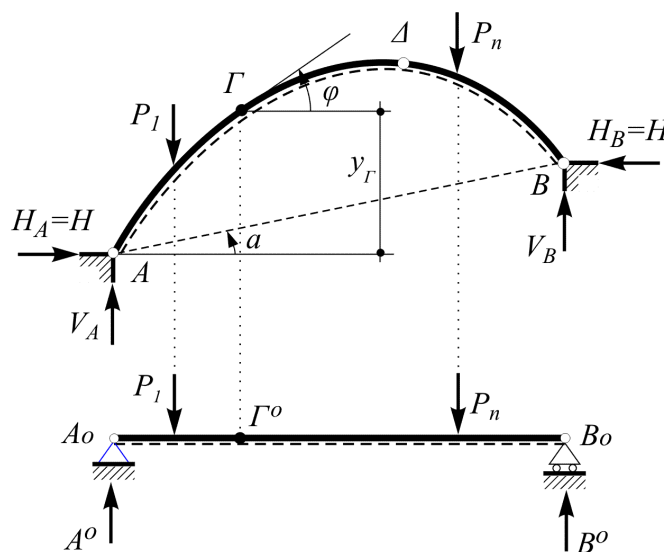
**όπου:** α η γωνία που σχηματίζει η AB με την οριζόντια που περνάει από το A

φ η γωνία κλίσης της υπόψη διατομής

H η συνιστώσα της  $H_A$  ή  $H_B$  κατά τη διεύθυνση AB

$M_{\Gamma^o}$ ,  $Q_{\Gamma^o}$  η καμπτική ροπή και η τέμνουσα δύναμη στη διατομή  $\Gamma^o$ , της αντίστοιχης προς το φορέα αμφιέριστης ΑοΒο, που φορτίζεται όπως ο αρχικός φορέας.

Στην άρθρωση  $\Delta$ , πρέπει φυσικά να ισχύει:  $M_{\Delta} = 0$ .



Το καμπύλο τόξο και ο συσχετισμός του με την αμφιέρειστη δοκό

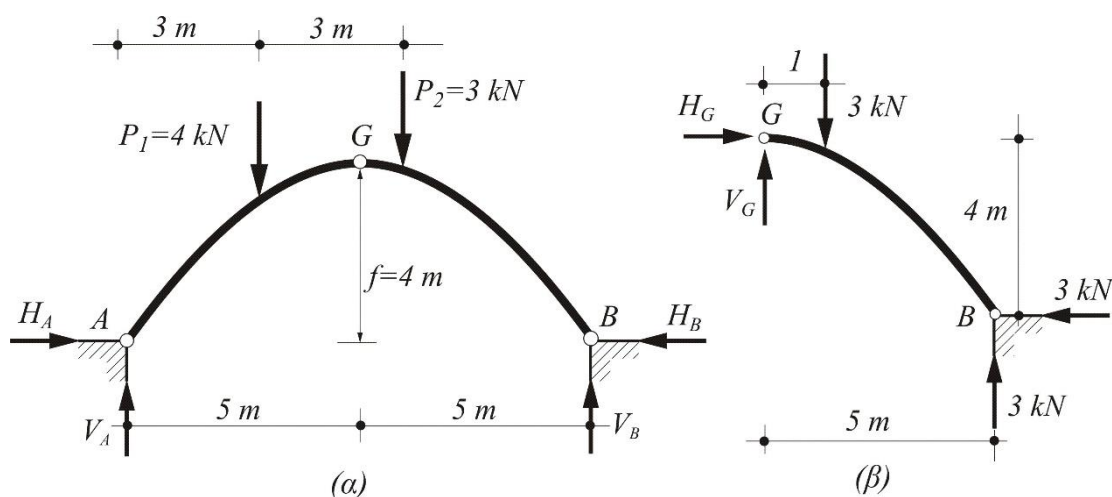
### Παράδειγμα

Του παραβολικού τριαρθρωτού φορέα που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν

- οι αντιδράσεις στις στηρίξεις και
- η δύναμη που διαβιβάζεται μέσω της άρθρωσης  $G$ .

### Λύση

Αν  $H_A$ ,  $H_B$  και  $V_A$ ,  $V_B$  είναι οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων στις στηρίξεις  $A$  και  $B$ , από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, σε συνδυασμό με τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 5.1 (α), θα έχουμε:



$$(\sum M)_A^{\perp+} = 0 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - V_B \cdot 10 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 3 \text{ kN}}$$

$$(\sum M)_{G_{\alpha\alpha}}^{\perp+} = 0 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + H_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow \underline{H_B = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_A - 4 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 4 \text{ kN}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 = H_A - 3 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 3 \text{ kN}}$$

Αν  $H_G$  και  $V_G$  είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που διαβιβάζεται μέσω της άρθρωσης  $G$ , εξετάζοντας την ισορροπία του δεξιού τμήματος (σχ. β), θα έχουμε:

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 = H_G - 3 = 0 \Rightarrow \underline{H_G = 3 \text{ kN}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_G - 3 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{V_G = 0}$$



## Κεφάλαιο 6°

### Γραμμές Επιρροής

Θα προσπαθήσουμε, στο κεφάλαιο αυτό, να δώσουμε με λίγα λόγια την έννοια της γραμμής επιρροής που παίζει σπουδαιότατο ρόλο στην Εφαρμοσμένη Στατική και φυσικά αποτελεί ουσιαστικό μέρος στους Υπολογισμούς Κατασκευών.

Οποιοδήποτε στατικό μέγεθος, όπως π.χ. η αντίδραση σε μια στήριξη, η ροπή κάμψης και η τέμνουσα δύναμη σε κάποια θέση μιας δοκού ή γενικότερα ενός φορέα, είναι, **όταν πρόκειται για κινητή φόρτιση**, συνάρτηση της θέσης του φορτίου πάνω στον εξεταζόμενο φορέα.

Αυτό μπορεί να γίνει γραφικά κατανοητό, αν **σε κάθε θέση** ενός συγκεντρωμένου **φορτίου** που κινείται κατά μήκος μιας δοκού, παίρνουμε από κάποιον οριζόντιο άξονα τετμημένων τις εκάστοτε **τιμές** του στατικού μεγέθους που εξετάζουμε, σαν κατακόρυφες **τεταγμένες** κάτω ακριβώς από το κινητό φορτίο.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο παριστάνει τότε τη **γραμμή επιρροής** του εξεταζόμενου στατικού μεγέθους.

Το μέγεθος του φορτίου που κινείται πάνω στη δοκό το παίρνουμε πάντοτε ίσο με τη **μονάδα** των δυνάμεων και κατά προτίμηση ίσο με **1 kN**.

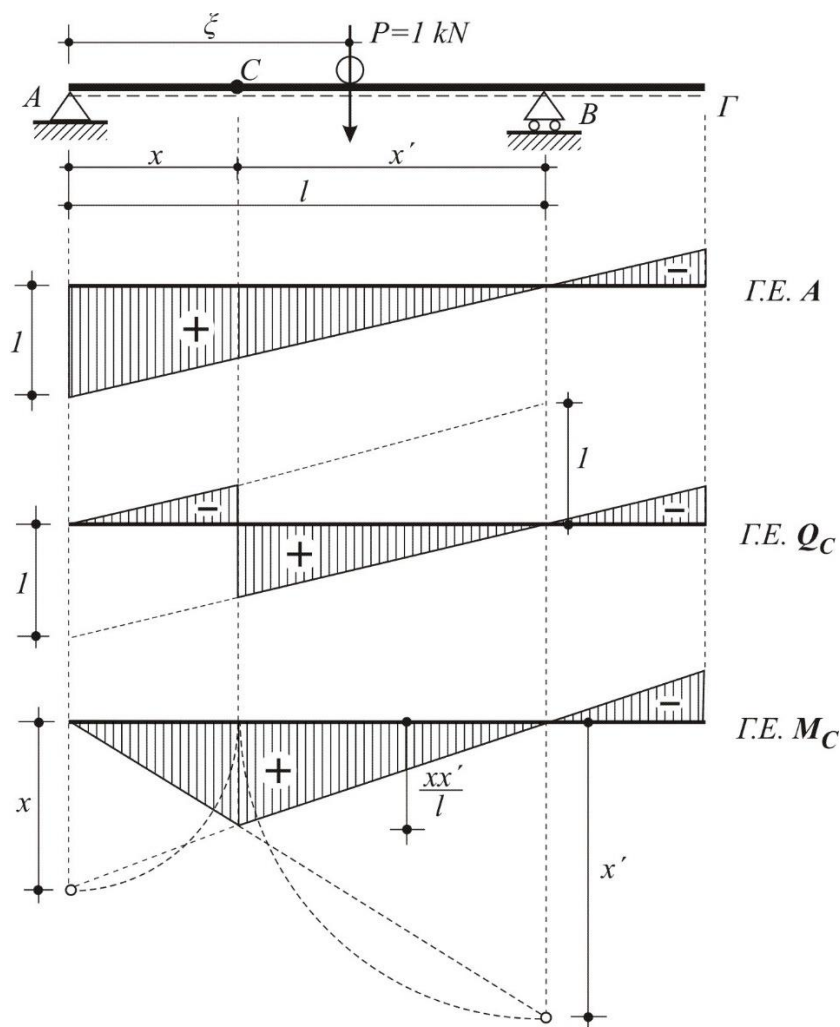
#### 6.1 – Γραμμές επιρροής αντιδράσεων, τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης δοκού

Η **γραμμή επιρροής της αντίδρασης A** στη δοκό που εικονίζεται στο επόμενο σχήμα, είναι προφανώς **ευθεία γραμμή**, επειδή η αντίδραση A, που προσδιορίζεται παίρνοντας ροπές ως προς τη στήριξη B, εκφράζεται **γραμμικά συναρτήσει του ξ**, δηλαδή:

$$(\Sigma M)_B^{\circ+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot l - 1(l - \xi) \quad \Leftrightarrow \quad A = 1 - \frac{\xi}{l} \quad (1)$$

Αντίστοιχα ισχύουν και για την αντίδραση B, οπότε:

$$\Sigma F_y^{\uparrow+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 1 - A = \frac{\xi}{l} \quad (2)$$



Γραμμές επιρροής αντίδρασης  $A$ ,  $Q_C$ ,  $M_C$  μονοπροέχουσας δοκού

Αν το φορτίο  $P = 1 \text{ kN}$  βρίσκεται **πάνω** στο αριστερό στήριγμα  $A$ , δηλαδή  $\xi = 0$ , τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι  $A = 1 \text{ kN}$ .

Αν όμως βρίσκεται στο δεξιό στήριγμα  $B$ , δηλαδή  $\xi = l$ , τότε από την ίδια σχέση προκύπτει ότι  $A = 0$ .

Αν τέλος το φορτίο βρίσκεται πάνω στον πρόβολο, δηλαδή  $\xi > l$ , τότε η τιμή της αντίδρασης  $A$  γίνεται αρνητική.

**Η τέμνουσα δύναμη,  $Q_C$ , θα υπολογιστεί σε δύο στάδια:**

ι. Για κίνηση του  $P=1$  στο τμήμα  $AC$ . Τότε, παίρνουμε τις δυνάμεις:

- **δεξιά** του  $C$ , επειδή τότε η μοναδική δύναμη που εμφανίζεται είναι μόνο η αντίδραση  $B$ , τείνοντας να περιστραφεί αριστερόστροφα, και είναι:

$$Q_C = -B,$$

- αλλιώς, αν θέλουμε, όπως εδώ, να εκφράσουμε την  $Q_C$  συναρτήσει της αντίδρασης  $A$ , παίρνουμε τις δυνάμεις **αριστερά** του  $C$ , οπότε είναι:

$$Q_C = A - 1.$$

- ii. Για κίνηση του  $P=1$  στο τμήμα CBΓ, παίρνουμε το άθροισμα των κατακόρυφων δυνάμεων αριστερά του  $C$ , οπότε προκύπτει:

$$Q_C = A.$$

Άρα η γραμμή επιρροής (Γ.Ε.) της  $Q_C$ , αποτελείται από **δύο ευθείες παράλληλες** προς τη Γ.Ε. της αντίδρασης  $A$ , οι οποίες, στη θέση  $C$ , παρουσιάζουν ένα **άλμα** μεταβολής τιμών από:

$$-\frac{x}{l} \quad \text{σε} \quad 1 - \frac{x}{l}.$$

Η ροπή κάμψης,  $M_C$ , στη διατομή  $C$  που απέχει απόσταση  $x$  από το αριστερό άκρο του φορέα, όταν το φορτίο βρίσκεται δεξιά της διατομής, θα βρεθεί παίρνοντας το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που βρίσκονται αριστερά της διατομής, το οποίο προφανώς είναι  $A \cdot x$ .

Αντίστοιχα, αν το φορτίο κινείται αριστερά της διατομής, παίρνοντας το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που βρίσκονται δεξιά της διατομής, θα βρούμε ότι η τιμή της  $M_C$  είναι  $B \cdot x'$ , όπου  $B$  η αντίδραση στο  $B$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι είτε το φορτίο κινείται αριστερά είτε δεξιά της  $C$ , η τιμή της καμπτικής ροπής στη διατομή  $C$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $\xi$ , καθώς είναι συνάρτηση των αντιδράσεων  $A$  και  $B$ , οι οποίες, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (1) και (2), είναι ήδη συναρτήσεις του  $\xi$ .

Άρα η Γ.Ε. για τη ροπή κάμψης στη διατομή  $C$ , θα είναι μια τεθλασμένη γραμμή που περνάει από τα σημεία στήριξης της δοκού (όπου είναι  $x=x'=0$ ) και παρουσιάζει μια κορυφή στη διατομή  $C$  (όπου  $\xi=x$ ), η τεταγμένη της οποίας:

- Για κίνηση του φορτίου δεξιά του  $C$  είναι:

$$M_C = A \cdot x = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)x = \frac{l - \xi}{l}x = \frac{x' \cdot x}{l},$$

- Ενώ για κίνηση του φορτίου αριστερά του  $C$ , πάλι, είναι:

$$M_C = B \cdot x' = \frac{\xi}{l}x' = \frac{x \cdot x'}{l}.$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι και στις δύο Γ.Ε.,  $Q_C$  και  $M_C$ , οι τεταγμένες στις διάφορες αποστάσεις  $x$ , απεικονίζουν αντίστοιχα τις τιμές της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής στη θέση της διατομής  $C$ .

Η πρακτική χρησιμότητα των γραμμών επιρροής έγκειται στο ότι όταν έχουμε χαράξει τη γραμμή επιρροής κάποιου στατικού μεγέθους,  $U$ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την τιμή του για οποιοδήποτε σύστημα φορτίων πάνω στη δοκό. Πράγματι:

1. Αν θεωρήσουμε ένα συρμό φορτίων  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , τα οποία βρίσκονται σε κάποιες θέσεις στη δοκό, όπου οι αντίστοιχες τεταγμένες της γραμμής

επιρροής του  $U$  κάτω από τα φορτία είναι  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , τότε η τιμή του στατικού μεγέθους  $U$  για την παραπάνω θέση των φορτίων  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , θα δίνεται από το άθροισμα:

$$U = P_1 \cdot \psi_1 + P_2 \cdot \psi_2 + \dots + P_n \cdot \psi_n = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \psi_i \quad (a)$$

2. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το σύστημα των φορτίων είναι ένα συνεχές φορτίο  $q = q(x)$ , το οποίο εκτείνεται από τη θέση  $a$  έως τη διατομή  $\beta$ , τότε αυτό αναλύεται σε άπειρα απειροστά φορτία  $q \cdot dx$ , ενώ το άθροισμα της εξίσωσης (a) μετατρέπεται τώρα στο ολοκλήρωμα:

$$U = \int_a^\beta q \cdot \psi \cdot dx = \int_a^\beta q(x) \cdot \psi(x) \cdot dx,$$

όπου  $\psi = \psi(x)$  οι τεταγμένες της γραμμής επιρροής στην περιοχή από  $a$  έως  $\beta$  του φορέα.

Συνεπώς το θέμα ανάγεται τελικά στον υπολογισμό του **γινομένου δύο ολοκληρωμάτων κατά Mohr**, που γνωρίσαμε ήδη στην επίλυση ενός υπερστατικού φορέα με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Ιδιαίτερα απλός είναι ο υπολογισμός της ζητούμενης τιμής του στατικού μεγέθους  $U$ , όταν το φορτίο είναι **ομοιόμορφο**, δηλαδή σταθερό. Τότε η ποσότητα  $q(x)$ , σαν σταθερή, βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα, οπότε θα είναι:

$$U = q \cdot \int_a^\beta \psi(x) \cdot dx.$$

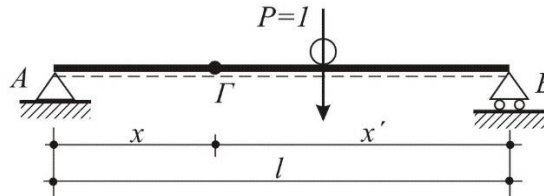
Επειδή όμως το ολοκλήρωμα  $\int_a^\beta \psi(x) \cdot dx$  παριστάνει το εμβαδόν  $F$  της **επιφάνειας επιρροής** του στατικού μεγέθους  $U$  που βρίσκεται **κάτω** από την περιοχή  $\beta - a$  του **φορτίου**, συμπεραίνουμε ότι:

$$U = q \cdot F.$$

Δηλαδή προκύπτει ο κανόνας ότι, για να βρούμε την τιμή κάποιου στατικού μεγέθους για ένα **ομοιόμορφο** φορτίο, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το φορτίο τούτο επί το εμβαδόν της επιφάνειας επιρροής του στατικού μεγέθους, που βρίσκεται ακριβώς κάτω από το ομοιόμορφο φορτίο.

## Παράδειγμα

Του παρακάτω αμφιέρειστου φορέα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα των γραμμών επιρροής, για κίνηση του μοναδιαίου φορτίου  $P = 1$ , από  $A$  έως  $B$ , τόσο για τις αντιδράσεις  $A$  και  $B$ , όσο και για τα εντατικά μεγέθη της τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής που αναπτύσσονται στη διατομή  $\Gamma$ ,



## Λύση

### Γ.Ε. A

$$\text{Είναι: } (\Sigma M)_B^{\circ+} = 0 \Rightarrow A \cdot l - 1 \cdot \beta = 0 \Rightarrow A = \beta / l$$

$$\text{Άρα: Για } \beta = 0 \text{ (} P = 1 \text{ στο B)} \Rightarrow A = 0, \text{ ενώ}$$

$$\text{Για } \beta = l \text{ (} P = 1 \text{ στο A)} \Rightarrow A = 1$$

### Γ.Ε. B

Αναλογικά προς τη Γ.Ε. A

### Γ.Ε. Q<sub>Γ</sub>

$$\text{Όταν το } P = 1 \text{ κινείται στο } \underline{\Gamma B} \text{ τότε είναι: } Q_{\Gamma} = +A.$$

$$\text{Άρα: } \underline{\Gamma.Ε. Q_{\Gamma} = +\Gamma.Ε. A}$$

$$\text{Όταν το } P = 1 \text{ κινείται στο } \underline{A\Gamma} \text{ τότε είναι: } Q_{\Gamma} = -B.$$

$$\text{Άρα: } \underline{\Gamma.Ε. Q_{\Gamma} = -\Gamma.Ε. B}$$

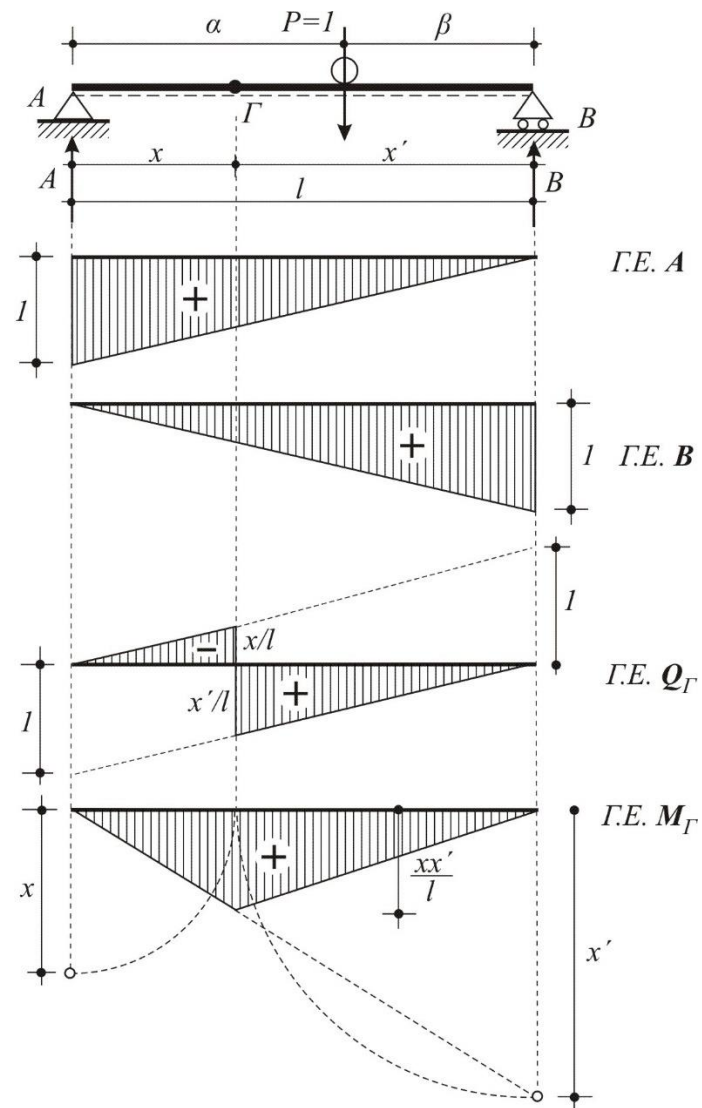
### Γ.Ε. M<sub>Γ</sub>

$$\text{Όταν το } P = 1 \text{ κινείται στο } \underline{\Gamma B} \text{ τότε είναι: } M_{\Gamma} = +Ax.$$

$$\text{Άρα: } \underline{\Gamma.Ε. M_{\Gamma} = x \cdot \Gamma.Ε. A}$$

$$\text{Όταν το } P = 1 \text{ κινείται στο } \underline{A\Gamma} \text{ τότε είναι: } M_{\Gamma} = Bx'.$$

$$\text{Άρα: } \underline{\Gamma.Ε. M_{\Gamma} = x' \cdot \Gamma.Ε. B}$$



Γραμμές επιρροής αντιδράσεων  $A$ ,  $B$  και  $Q_G$ ,  $M_G$  αμφιερέιστου

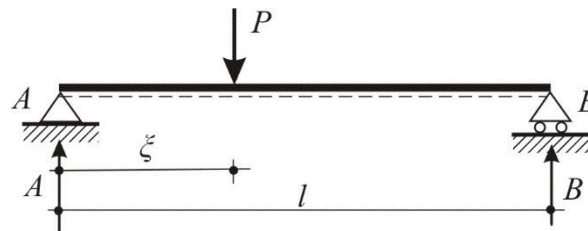
## 6.2 – Κινητά φορτία

Όταν πολλά συγκεντρωμένα φορτία που είναι σε σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους κινούνται πάνω σε μια δοκό, λέμε ότι αποτελούν ένα συρμό φορτίων.

Τέτοια περίπτωση συναντάμε όταν π.χ. μια αμαξοστοιχία περνάει μια γέφυρα. Τότε γεννιέται εύλογα το ερώτημα:

**Για ποια θέση του συρμού των φορτίων πάνω στη γέφυρα, η ροπή κάμψης, που αντιστοιχεί κάθε φορά στη δυσμενέστερη διατομή, γίνεται μέγιστη;**

Αν δεν υπάρχει μόνιμη φόρτιση αλλά **ένα μόνο** συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  σε μεταβαλλόμενη απόσταση  $\xi$  από το αριστερό άκρο της αμφιέρειστης δοκού  $AB$ , τότε η μέγιστη ροπή κάμψης παράγεται πάντα κάτω από το φορτίο αυτό.



Επειδή η αντίδραση στο  $A$  είναι:

$$A = P \frac{l - \xi}{l} = P \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right),$$

έπεται ότι η ροπή κάμψης κάτω από το φορτίο  $P$ , θα είναι:

$$M = A \cdot \xi = P \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \cdot \xi.$$

Η τιμή αυτή, που μεταβάλλεται με το  $\xi$ , γίνεται μέγιστη, όταν:

$$\frac{dM}{d\xi} = 0, \quad \text{ή}$$

$$\left[ P\xi - \frac{P\xi^2}{l} \right]' = P \left( 1 - \frac{2\xi}{l} \right) = 0,$$

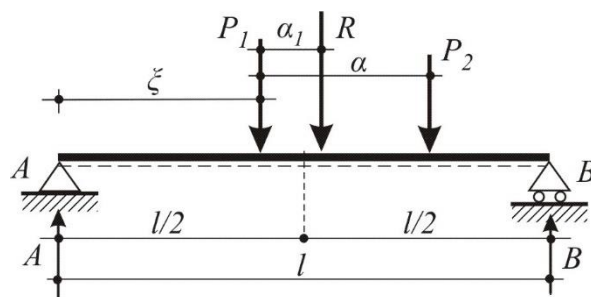
δηλαδή για  $\xi = l/2$ , ή με άλλα λόγια, όταν το φορτίο  $P$  **βρίσκεται στο μέσον** της δοκού.

### 6.3 – Περίπτωση συρμού από δυο φορτία

Έστω ότι δυο κινητά φορτία  $P_1, P_2$ , με σταθερή απόσταση  $a$  μεταξύ τους, κινούνται πάνω σε μια δοκό.

Αν λάβουμε υπόψη ότι το διάγραμμα των καμπτικών ροπών είναι ένα πολύγωνο με κορυφές στις θέσεις των κατακόρυφων φορτίων, συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη ροπή κάμψης θα εμφανιστεί κάτω από το ένα ή το άλλο φορτίο του συρμού.

Θα εξετάσουμε επομένως πότε η παραπάνω ροπή κάμψης παίρνει τη μέγιστη τιμή της.



Έστω  $\xi$  η απόσταση του πρώτου φορτίου  $P_1$  από το στήριγμα A. Οι αντιδράσεις του φορέα θα είναι:

$$(\Sigma M)_A^{\circ+} = 0 \Rightarrow P_1 \cdot \xi + P_2(\xi + a) - B \cdot l = 0 \Rightarrow B = \frac{P_1 \cdot \xi + P_2 \cdot \xi + P_2 \cdot a}{l}$$

$$\Sigma V^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - P_1 - P_2 + B = 0 \Rightarrow A = P_1 + P_2 - B \quad \text{ή}$$

$$A = \frac{P_1 \cdot l + P_2 \cdot l - P_1 \cdot \xi - P_2 \cdot \xi - P_2 \cdot a}{l} = \frac{(P_1 + P_2)(l - \xi) - P_2 \cdot a}{l}$$

Η καμπτική ροπή κάτω από τα φορτία  $P_1$  και  $P_2$ , θα είναι αντίστοιχα:

$$M_1 = A \cdot \xi = \frac{\xi}{l} [(P_1 + P_2)(l - \xi) - P_2 \cdot a]$$

$$M_2 = A(\xi + a) - P_1 \cdot a = \frac{\xi + a}{l} [(P_1 + P_2)(l - \xi) - P_2 \cdot a] - P_1 \cdot a$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι  $M_1 > M_2$ , δηλαδή ότι η μεγαλύτερη ροπή κάμψης αναπτύσσεται στη θέση του φορτίου  $P_1$ .

Η συνθήκη που θα μας δώσει τη θέση του συρμού για την οποία η  $M_1$  γίνεται μέγιστη, είναι:

$$\frac{dM_1}{d\xi} = 0, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\frac{(P_1 + P_2)(l - \xi) - P_2 \cdot a}{l} + \frac{\xi}{l} [-(P_1 + P_2)] = 0, \quad \text{ή}$$

$$(P_1 + P_2)(l - \xi) - P_2 \cdot a = \xi(P_1 + P_2) \Rightarrow (P_1 + P_2)l - P_2 \cdot a = 2\xi(P_1 + P_2)$$



$$\xi = \frac{(P_1 + P_2)l - P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)} = \frac{l}{2} - \frac{P_2}{2(P_1 + P_2)} \cdot a \quad (1)$$

Αλλά το μέγεθος:

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2} \cdot a = \alpha_1,$$

είναι η απόσταση της συνισταμένης των φορτίων του συρμού από το  $P_1$ .

Διότι, αν  $R = P_1 + P_2$ , θα πρέπει να ισχύει:

$$R \cdot a_1 = P_2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{P_2}{R} a = \frac{P_2}{P_1 + P_2} a$$

Επομένως, τη σχέση (1), μπορούμε τώρα να τη γράψουμε:

$$\xi = \frac{l}{2} - \frac{a_1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{l}{2} = \xi + \frac{a_1}{2} \quad (\alpha)$$

Αν τώρα δεχτούμε ότι  $M_2 > M_1$ , δηλαδή ότι η μεγαλύτερη ροπή κάμψης εμφανίζεται κάτω από το φορτίο  $P_2$ , τότε, με εντελώς ανάλογες σκέψεις, από τη συνθήκη:

$$\frac{dM_2}{d\xi} = 0,$$

θα πάρουμε ότι η θέση του συρμού για την οποία η  $M_2$  γίνεται μέγιστη, δίνεται από τη σχέση

$$\xi = \frac{l - \alpha}{2} - \frac{a_1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{l}{2} = \xi + \alpha_1 + \frac{\alpha - a_1}{2} \quad (\beta)$$

Αν τώρα ονομάσουμε θεμελιώδες φορτίο, εκείνο, κάτω από το οποίο παράγεται η απόλυτα μέγιστη ροπή κάμψης, τότε από τους τύπους (α) και (β) προκύπτει η παρακάτω πρόταση:

**Η δυσμενέστερη θέση ενός συρμού που αποτελείται από δύο φορτία, σε απλή αμφιέριστη δοκό, είναι πάντοτε εκείνη, για την οποία το μέσον της δοκού διχοτομεί την απόσταση μεταξύ του θεμελιώδους φορτίου και της συνισταμένης των δύο φορτίων του συρμού.**

### Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι στην περίπτωση φόρτισης απλής αμφιέριστης δοκού με συρμό δυο ίσων φορτίων  $P$  σε απόσταση  $a$  μεταξύ τους:

1. η απόλυτα μέγιστη τιμή της ροπής κάμψης είναι:

$$\max M = \frac{P}{8l} (2l - a)^2$$

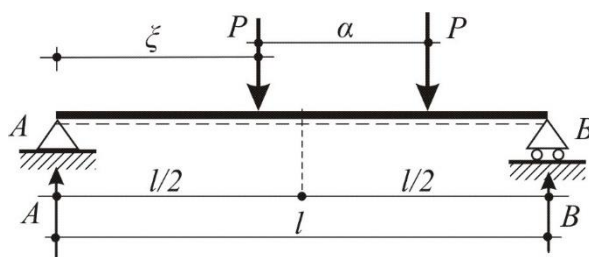
για  $a < 0.5858 \cdot l$ , και

2. να βρεθούν οι θέσεις του συρμού στις οποίες παράγεται.

## Λύση

Επειδή τα δύο φορτία είναι ίσα μεταξύ τους,  $P_1 = P_2 = P$ , δεν αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις όπου είναι  $M_1 < M_2$  ή  $M_2 < M_1$ .

Αν λοιπόν η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανιστεί κάτω από το αριστερό φορτίο, που απέχει από την αριστερή στήριξη Α απόσταση  $\xi$ , τότε με το ίδιο σκεπτικό, ίση μέγιστη ροπή κάμψης θα εμφανιστεί και κάτω από το δεξιό φορτίο, που για κάποια άλλη θέση του συρμού θα απέχει από τη δεξιά στήριξη Β απόσταση **πάλι**  $\xi$ .



Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε τη μια από τις δυο αυτές περιπτώσεις, έστω την πρώτη.

Η αντίδραση Α της δοκού για τη θέση αυτή του συρμού θα βρεθεί από το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών ως προς τη στήριξη Β.

$$(\Sigma M)_B^{\circ+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot l - P(l - \xi) - P(l - \xi - \alpha) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{P}{l}(2l - 2\xi - \alpha)$$

Η ροπή κάμψης που παράγεται κάτω από το αριστερό φορτίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$M = A \cdot \xi = \frac{P \cdot \xi}{l}(2l - 2\xi - \alpha).$$

Για να έχουμε  $\max M$ , θα πρέπει:

$$\frac{dM}{d\xi} = 0, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$\frac{P}{l}(2l - 2\xi - \alpha) + \frac{P \cdot \xi}{l}(-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2l - 2\xi - \alpha = 2\xi$$

$$\xi = \frac{2l - \alpha}{4} = \frac{l}{2} - \frac{\alpha}{4}$$

Έτσι όταν το πρώτο φορτίο του συρμού (αριστερό) απέχει από την αριστερή στήριξη Α απόσταση:

$$\xi = \frac{l}{2} - \frac{\alpha}{4}$$

έχουμε  $\max M$ , που είναι:

$$\begin{aligned} \max M &= A \cdot \xi = \frac{P}{l} \left[ 2l - 2 \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{4} \right) - \alpha \right] \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{4} \right) \quad \text{ή} \\ \max M &= \frac{P}{4l} \left( 2l - l + \frac{a}{2} - a \right) (2l - a) = \frac{P}{4l} \left( l - \frac{a}{2} \right) (2l - a) = \\ &= \frac{P}{4l} \left( \frac{2l - a}{2} \right) (2l - a) = \frac{P}{8l} (2l - a)^2 \end{aligned}$$

Επειδή τώρα η μέγιστη ροπή κάμψης που δημιουργεί ο συρμός των δύο φορτίων πρέπει σε κάθε περίπτωση να είναι **μεγαλύτερη** της μέγιστης ροπής κάμψης που παράγει ο ίδιος συρμός **με ένα φορτίο** (στην περίπτωση που το  $a$  είναι τόσο μεγάλο ώστε το άλλο φορτίο να βρίσκεται έξω από τη δοκό), και επειδή η μέγιστη ροπή κάμψης που παράγει ο συρμός με ένα φορτίο είναι:

$$\max M_1 = \frac{P \cdot l}{4}$$

καθώς τότε θα είναι  $\xi = l/2$  και  $A = B = P/2$ , δηλαδή:

$$\max M_1 = A \cdot \xi = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{4},$$

έπεται ότι σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να είναι:

$$\begin{aligned} \frac{P}{8l} (2l - a)^2 &> \frac{P \cdot l}{4} \quad \text{ή} \quad (2l - a)^2 > 2l^2 \\ 4l^2 - 4la + a^2 &> 2l^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 4la + 2l^2 > 0 \end{aligned}$$

Οι ρίζες του τριωνύμου αυτού (τύπος ημίσεος), είναι:

$$\alpha = 2l \pm \sqrt{4l^2 - 2l^2} = 2l \pm l\sqrt{2} = l(2 \pm \sqrt{2})$$

Το τριώνυμο αυτό γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του συντελεστή του  $a$  (που είναι το +1) όταν το  $a$  παίρνει τιμές εκτός των ριζών, δηλαδή όταν:

$$a > (2 + \sqrt{2})l \quad \text{ή} \quad a < (2 - \sqrt{2})l$$

Επειδή όμως για  $a > (2 + \sqrt{2})l$  το δεύτερο φορτίο θα βρίσκεται μόνιμα έξω από τη δοκό, έπεται ότι τότε ο συρμός των δύο φορτίων εκφυλίζεται σε συρμό **ενός μόνο** φορτίου. Συνεπώς δεκτές είναι μόνον οι τιμές του  $a$  για τις οποίες είναι:

$$a < (2 - \sqrt{2})l \quad \text{ή} \quad a < (2 - 1,4142)l$$

$$\text{ή τελικά} \quad \underline{\underline{a < 0,5858 \cdot l}}$$

### Αρχή των δυνατών έργων

Η αρχή των δυνατών έργων αποτελεί στη Μηχανική μια από τις ωραιότερες και απλούστερες μεθόδους για την επίλυση υπερστατικών φορέων. Αλλά και στις διάφορες εφαρμογές της Στατικής, ιδίως στη Μηχανολογία, είναι δυνατόν να εμφανίζονται τα παρακάτω προβλήματα:

α) Εύρεση των συνθηκών ισορροπίας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων που ενώνονται μεταξύ τους με συνδέσμους και φορτίζονται με εξωτερικές δυνάμεις, και

β) Καθορισμός των δυνατών θέσεων ισορροπίας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων, στην περίπτωση που αυτό (το σύστημα) έχει κάποια ελευθερία κίνησης.

Το πρώτο είδος του προβλήματος ανάγεται στον υπολογισμό των αντιδράσεων που εμφανίζονται στις στηρίξεις ή στους συνδέσμους του συστήματος, που γνωρίσαμε ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει το δεύτερο είδος του προβλήματος, το οποίο θ' αντιμετωπίσουμε με τη χρήση της έννοιας του **έργου** δύναμης.

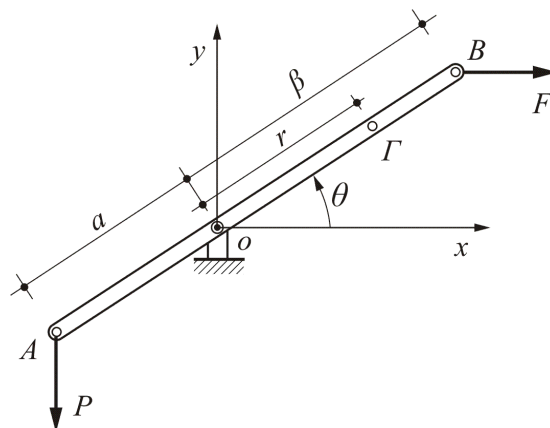
Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου των δυνατών έργων έγκειται στο γεγονός ότι **για την επίλυση** ενός προβλήματος, όταν έχουμε ένα σύστημα σωμάτων όπου δεν εμφανίζεται τριβή, **δεν είναι απαραίτητη η αποσύνθεση** του συστήματος σε μικρότερα τμήματα για τον υπολογισμό των αντιδράσεων ή εσωτερικών δυνάμεων.

#### 7.1 – Δυνατές μετατοπίσεις

Θεωρούμε το μοχλό του παρακάτω σχήματος, ο οποίος στηρίζεται στο  $O$  με άρθρωση, ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον δια του  $O$  άξονα, κάθετα στο επίπεδο  $xOy$ .

Στα άκρα  $A$  και  $B$  του μοχλού ενεργούν οι δυνάμεις  $P$  και  $F$  οι οποίες κείνται στο επίπεδο  $xOy$ .

Η θέση του μοχλού καθορίζεται με ακρίβεια από τη γωνία  $\theta$  την οποία σχηματίζει με τον άξονα  $Ox$  στο επίπεδο περιστροφής του, που ουσιαστικά είναι το επίπεδο της σελίδας.



Επομένως αν οι δυνάμεις  $P$  και  $F$  είναι γνωστές, τότε υπάρχει μια θέση ισορροπίας του μοχλού, που προσδιορίζεται από τη γωνία  $\theta$ , η οποία αποτελεί και το ζητούμενο μέγεθος.

Επειδή το μοναδικό είδος κίνησης του συστήματος είναι η στροφή του γύρω από τον άξονα που περνάει από το  $O$ , λέμε ότι το σώμα έχει **ένα βαθμό ελευθερίας**, ενώ τη γωνία  $\theta$ , που καθορίζει τη θέση του, ονομάζουμε **παράμετρο του συστήματος**.

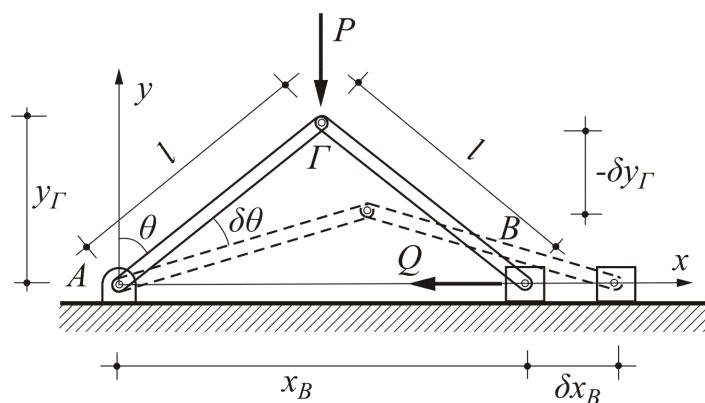
Για να μελετήσουμε στη συνέχεια την ισορροπία του, πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο μοχλός δέχεται κάποια απειροστή μετακίνηση από τη θέση εκείνη που έχει καθοριστεί σαν θέση ισορροπίας του.

Τέτοια μετακίνηση μπορούμε να πάρουμε δίνοντας στη γωνία  $\theta$  κάποια απειροστή μεταβολή (αύξηση ή ελάττωση),  $\delta\theta$ . Είναι φανερό ότι κατά τη μεταβολή αυτή της γωνίας  $\theta$ , κάθε σημείο  $\Gamma$  του μοχλού που απέχει απόσταση  $r$  από τον άξονα περιστροφής, μετατοπίζεται κατά απειροστό κυκλικό τόξο, μήκους  $r \cdot \delta\theta$ , που μπορεί να θεωρηθεί σαν ευθύγραμμο απειροστό τμήμα κάθετο στην ακτίνα  $OG$ .

Τέτοιες απειροστές μετατοπίσεις ονομάζονται **δυνατές μετατοπίσεις**. Έτσι οι δυνατές μετατοπίσεις για τα σημεία  $A$  και  $B$  του μοχλού, είναι αντίστοιχα  $a \cdot \delta\theta$  και  $\beta \cdot \delta\theta$ , κάθετες στον άξονα  $AB$  του μοχλού και αντίθετα κατευθυνόμενες.

Θεωρούμε τώρα το σύστημα των δύο ίσων ράβδων  $A\Gamma$  και  $\Gamma B$  του επομένου σχήματος, που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους, έτσι, ώστε με την κατακόρυφη δράση της  $P$ , η άρθρωση  $B$  να μετακινεί οριζόντια το σώμα με το οποίο συνδέεται, με δύναμη  $Q$ .

Η διάταξη έχει ένα βαθμό ελευθερίας, τη στροφή της ράβδου  $A\Gamma$  γύρω από την άρθρωση  $A$ . Επομένως η θέση της καθορίζεται με την τιμή της γωνίας  $\theta$ , η οποία στην προκειμένη περίπτωση, αποτελεί την **παράμετρο του συστήματος**.



Για τον υπολογισμό των δυνατών μετατοπίσεων που εμφανίζονται στα διάφορα σημεία του συστήματος, δίνουμε στην παράμετρο  $\theta$  απειροστή αύξηση  $\delta\theta$ , οπότε το σημείο B θα μετατοπιστεί οριζόντια κατά  $\delta x_B$ , ενώ ταυτόχρονα το Γ θα μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά  $\delta y_\Gamma$ .

Οι μετατοπίσεις αυτές υπολογίζονται από τις σχέσεις που εκφράζουν τις αποστάσεις των σημείων B και Γ αντίστοιχα από τους άξονες  $y$  και  $x$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ , διαφορίζοντας ως προς  $\theta$ .

Έτσι, από τις σχέσεις:

$$x_B = 2l\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad y_\Gamma = l\sigma\upsilon\nu\theta,$$

ύστερα από διαφορίση ως προς τη μεταβλητή γωνία  $\theta$ , προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$\delta x_B = 2l\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \delta\theta \quad \text{και} \quad \delta y_\Gamma = -l\eta\mu\theta \cdot \delta\theta$$

Από τα δύο παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτει ότι ο **υπολογισμός των δυνατών μετατοπίσεων** για τα διάφορα σημεία ενός συστήματος με κινητά μέρη, είναι πρόβλημα **καθαρά γεωμετρικό**.

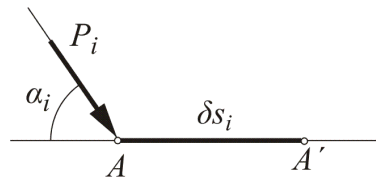
## 7.2 – Δυνατά έργα

Ο υπολογισμός των δυνατών μετακινήσεων ενός συστήματος με κινητά μέρη που εκτέθηκε στην προηγούμενη ενότητα αποτελεί το πρώτο και σημαντικότερο στάδιο για τον προσδιορισμό του σχήματος ισορροπίας ενός τέτοιου συστήματος.

Για την ολοκλήρωση όμως του σκοπού αυτού θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του **έργου μιας δύναμης**.

Θεωρούμε τη δύναμη  $P_i$  του επομένου σχήματος, που εφαρμόζεται στο σημείο A, το οποίο μετακινείται κατά απειροστό μήκος  $\delta s_i$  πάνω στη διεύθυνση της AA'. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δύναμη  $P_i$  **παρήγαγε έργο**, το οποίο

ορίζεται σαν γινόμενο της μετατόπισης  $\delta s_i$  επί την προβολή  $P_i \cdot \sin \alpha_i$  της δύναμης πάνω στη διεύθυνση της μετατόπισης αυτής.



Αν λοιπόν ονομάσουμε  $\delta U_i$  το έργο της δύναμης  $P_i$  κατά τη μετατόπιση  $\delta s_i$ , τότε θα έχουμε

$$\delta U_i = P_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \delta s_i. \quad (\alpha)$$

Η απειροστή αυτή μεταβολή του έργου έχει διαστάσεις «δύναμη  $\times$  μήκος» και είναι θετική μόνον όταν η προβολή της δύναμης και η μετατόπιση έχουν την ίδια φορά.

Επομένως το **έργο** είναι μέγεθος **βαθμωτό** και εκφράζεται συνήθως σε  $\text{kp} \cdot \text{cm}$  ή  $\text{kN} \cdot \text{m}$ , σε αντίθεση με τη ροπή, που αν και έχει τις ίδιες διαστάσεις, είναι διανυσματικό μέγεθος. (Το **έργο** είναι το **εσωτερικό** γινόμενο δύναμης επί απόστασης, ενώ η ροπή είναι το εξωτερικό γινόμενο αυτών).

Το έργο που παράγει συνολικά η  $P_i$  αν μετατοπίσει το σημείο  $A$  κατά μια διαδρομή  $s$ , προκύπτει αν ολοκληρώσουμε τη σχέση (α) σ' όλο το μήκος της διαδρομής. Δηλαδή

$$U_i = \int_s P_i \sin \alpha_i \delta s_i.$$

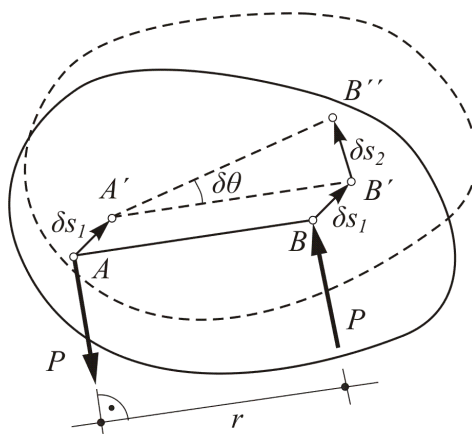
Για τον υπολογισμό της ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι γνωστή η σχέση μεταξύ των  $P_i$ ,  $s_i$  και  $\sin \alpha_i$ , χωρίς να είναι απαραίτητο η διαδρομή  $s$  να είναι ευθεία γραμμή.

Όταν λοιπόν σε ένα κινητό σύστημα στερεών σωμάτων, όπου ενεργεί εξωτερικά ένα σύστημα δυνάμεων, δοθεί μια απειροστή μετατόπιση, τότε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετατοπίζονται, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις να εκτελούν μικρές ποσότητες έργων, τα οποία ονομάζονται **δυνατά έργα**.

Αν στο ίδιο υλικό σημείο δρουν περισσότερες από μια δυνάμεις, τότε το έργο της συνισταμένης ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.

Κατά τη μετατόπιση ενός σώματος, το έργο της βαρύτητας ισούται με το γινόμενο του βάρους του σώματος επί την κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης του κέντρου βάρους του. Είναι ανεξάρτητο του δρόμου και είναι θετικό για κίνηση του σώματος προς τα κάτω, αρνητικό για κίνηση προς τα πάνω και μηδέν για οριζόντια κίνηση ή κλειστή τροχιά.

Τέλος, στο παρακάτω σχήμα, θεωρούμε την περίπτωση **ζεύγους** δυνάμεων, το οποίο ενεργεί σ' ένα σώμα, προκαλώντας έτσι τη μετακίνησή του. Αν  $A$  και  $B$  είναι τα σημεία όπου ασκούνται οι δυνάμεις, εμφανίζοντας μια ροπή  $M = P \cdot r$ , κατά τη μετακίνηση του σώματος, τα σημεία αυτά θα καταλάβουν τελικά τις θέσεις  $A'$  και  $B''$  αντίστοιχα.



Η νέα θέση του σώματος μπορεί να θεωρηθεί σαν επαλληλία μιας παράλληλης μετατόπισης κατά το διάνυσμα  $AA' = BB'$  και μιας περιστροφής γύρω από το  $A'$  κατά τη γωνία  $\delta\theta$ .

Κατά την **παράλληλη** μετατόπιση, το έργο που παράγεται από τη δύναμη  $P$  είναι ίσο και αντίθετο προς το έργο που παράγει η  $-P$  και επομένως το **άθροισμά** τους είναι **μηδέν**.

Κατά το στάδιο της **περιστροφής** του σώματος γύρω από το  $A'$ , έργο παράγει μόνον η δύναμη  $P$ . Το έργο αυτό είναι

$$dU = P \cdot ds_2 = P \cdot (r \cdot \delta\theta) = M \cdot \delta\theta, \quad (\beta)$$

όπου η γωνία  $\delta\theta$  εκφράζεται σε ακτίνια.

Το παραγόμενο έργο είναι θετικό όταν η στροφή του σώματος γίνεται ομόφορα προς το ζεύγος και αρνητικό κατά την αντίθετη φορά.

### 7.3 – Η αρχή των δυνατών έργων

Όταν μια δύναμη ή μια ροπή παράγει δυνατό έργο που υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (α) ή (β) αντίστοιχα της προηγούμενης ενότητας, **δεχόμαστε ότι το μέτρο της παραμένει σταθερό** κατά τη διάρκεια της μετατόπισης ή της στροφής του σώματος.

Επίσης κατά τη μελέτη ενός κινητού συστήματος στερεών σωμάτων υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές στις διάφορες αρθρώσεις, έδρανα, τριβείς κλπ. των αξόνων, ούτε στις διάφορες ολισθήσεις μεταξύ επιφανειών.



Δεχόμαστε επίσης ότι τα διάφορα μέρη, από τα οποία αποτελείται το σύστημα είναι απόλυτα στερεά σώματα.

Τέτοια συστήματα ονομάζονται **ιδεώδη συστήματα**. Σ' αυτά μόνο οι δυνάμεις που δρουν εξωτερικά παράγουν έργο κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης του συστήματος.

Πραγματικά, οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του σώματος δεν παράγουν έργο, αφού πάντοτε εμφανίζονται κατά ζεύγη ίσων και αντιθέτων δυνάμεων και συνεπώς το ολικό τους έργο σε οποιαδήποτε μετατόπιση είναι μηδέν.

Για τα ιδεώδη αυτά συστήματα δεχόμαστε ότι ισχύει η παρακάτω **αρχή των δυνατών έργων**:

Αν για κάθε δυνατή μετατόπιση ενός ιδεώδους συστήματος, το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις είναι μηδέν, τότε το σύστημα ισορροπεί.

Έχοντας υπόψη τις σχέσεις (α) και (β) για το δυνατό έργο μιας δύναμης ή μιας ροπής, η παραπάνω αρχή μπορεί να διατυπωθεί αναλυτικά με την εξίσωση

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow \sum P_i \sin \alpha_i \delta s_i + \sum M_i \delta \theta_i = 0 \quad (\gamma)$$

Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, παρουσιάζει δυο σημαντικά πλεονεκτήματα.

α) Δεν είναι απαραίτητη η αποσύνθεση του συστήματος σε μικρότερα τμήματα, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας του κάθε τμήματος και

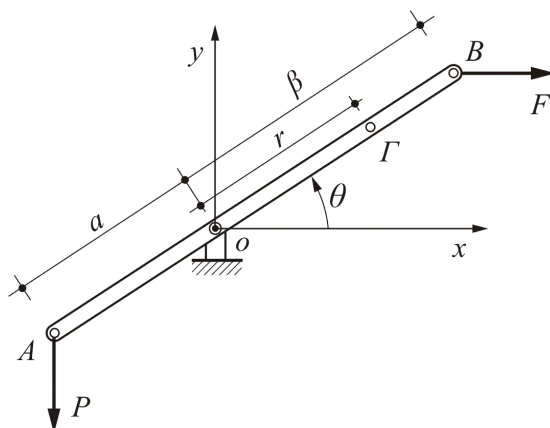
β) Οι σχέσεις μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία του συστήματος, μπορούν να καθοριστούν απευθείας, χωρίς την παρεμβολή των αντιδράσεων.

Τα πλεονεκτήματα αυτά κάνουν την εφαρμογή της αρχής αυτής χρήσιμη για τον προσδιορισμό της θέσης ισορροπίας οποιουδήποτε κινητού συστήματος στερεών σωμάτων (ιδεώδους) όπου ενεργούν γνωστά εξωτερικά φορτία.

## Παραδείγματα

1

Για την περίπτωση του μοχλού του ήδη γνωστού σχήματος, να προσδιοριστεί η γωνία  $\theta$ , για την οποία η ράβδος AB ισορροπεί.



## Λύση

Εφαρμόζοντας τη σχέση (γ) που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων για τις δυνάμεις P και F του σχήματος, οι οποίες εφαρμόζονται αντίστοιχα στα σημεία A και B του μοχλού, έχουμε:

$$\sum P_i \cdot \sigma \nu \alpha_i \delta s_i = 0 \Rightarrow P \cdot \sigma \nu \theta \cdot \delta s_p - F \eta \mu \theta \cdot \delta s_F = 0$$

όπου,  $\delta s_p = \alpha \delta \theta$  και  $\delta s_F = \beta \delta \theta$ ,

είναι οι μετακινήσεις των σημείων A και B κάθετα προς την AB. Άρα

$$P \sigma \nu \theta \cdot \alpha \cdot \delta \theta = F \eta \mu \theta \cdot \beta \cdot \delta \theta \Rightarrow \epsilon \phi \theta = \frac{P \cdot \alpha}{F \cdot \beta}.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση

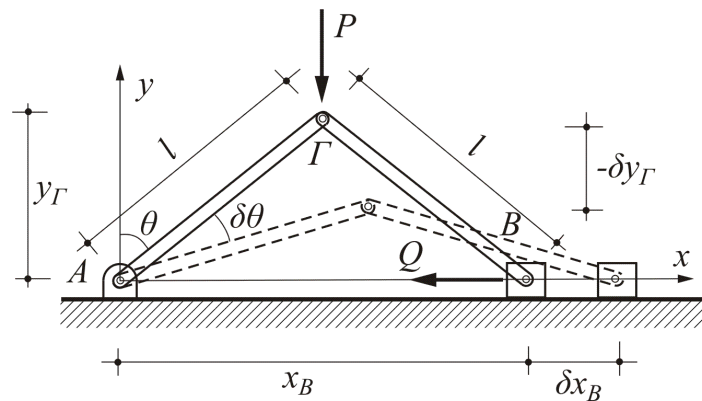
$$F \cdot \beta \eta \mu \theta - P \cdot \alpha \sigma \nu \theta = 0,$$

που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων, ουσιαστικά παριστάνει το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο A, δηλαδή τη σχέση  $(\Sigma M)_A^{\perp+} = 0$ .

Επομένως η αρχή των δυνατών έργων στο συγκεκριμένο αυτό πρόβλημα, λόγω άλλωστε της απλότητάς του, δεν προσφέρει τίποτα το ιδιαίτερο.

2

Για την περίπτωση των δύο ίσων ράβδων, στο σχήμα της ίδιας ενότητας 7.1, ζητείται να υπολογιστεί το μέγεθος της δύναμης Q η οποία πρέπει να ωθήσει το σώμα της κινητής άρθρωσης B, ώστε το σύστημα των ράβδων να ισορροπεί. (Δυνάμεις τριβής δε θα ληφθούν υπόψη).



### Λύση

Χρησιμοποιούμε πάλι τη σχέση ( $y$ ) της αρχής των δυνατών έργων μόνο για τις δυνάμεις  $P$  και  $Q$ , αφού οι αντιδράσεις, τόσο στην άρθρωση όσο και στην κύλιση δεν παράγουν έργο.

Έτσι, συνδυάζοντας τις σχέσεις που ήδη βρέθηκαν και εκφράζουν τις μετατοπίσεις  $\delta y_\Gamma$  και  $\delta x_B$  των σημείων  $\Gamma$  και  $B$  αντίστοιχα όπου εφαρμόζονται οι δυνάμεις  $P$  και  $Q$ , έχουμε:

$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow P \delta y_\Gamma - Q \delta x_B = 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο του  $\delta y_\Gamma$  εκφράζει τη μείωση της απόστασης του  $\Gamma$  με την αύξηση της γωνίας  $\theta$ , και φυσικά δεν σχετίζεται με το πρόσημο του έργου που παράγει η  $P$ , επειδή αυτό είναι θετικό μόνον όταν η δύναμη είναι ομόφορη προς τη μετατόπιση που πραγματοποιεί. Έτσι προέκυψε το αρνητικό πρόσημο του έργου της  $Q$ , οπότε η εξίσωση γίνεται

$$P \cdot l \cdot \eta \mu \theta \cdot \delta \theta - Q \cdot 2l \cdot \sigma \nu \theta \cdot \delta \theta = 0,$$

από όπου προκύπτει

$$Q = \frac{P}{2} \varepsilon \phi \theta.$$

### Παρατήρηση

Στο παράδειγμα αυτό φαίνονται ήδη τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Πραγματικά, η δύναμη  $Q$ , η οποία στην περίπτωση που ο μηχανισμός των ράβδων ήταν τριαρθρωτός φορέας θα έπαιζε το ρόλο οριζόντιας αντίδρασης στο  $A$  ή  $B$ , βρέθηκε χωρίς να ληφθούν υπόψη οι αντιδράσεις.

Αν η φορά της  $Q$  είχε τεθεί αυθαίρετα ομόφορη προς τη μετατόπιση που προκαλεί, τότε το πρόσημό της θα προέκυπτε αρνητικό. Αυτό θα σήμαινε τότε, ότι η σωστή φορά της είναι αντίθετη από αυτή που αρχικά είχε ληφθεί.

Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων είναι **χρήσιμη** γενικά στις περιπτώσεις όπου έχουμε **φορείς με κινητά βασικά μέρη**, αρκεί να υπάρχουν

απλές γεωμετρικές σχέσεις που να συνδέουν τις δυνατές μετακινήσεις των σημείων εκείνων, στα οποία εφαρμόζονται οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο.

**3** Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται μια πρέσα, στη χειρολαβή της οποίας ενεργεί το ζεύγος των δυνάμεων  $P$ , με ροπή  $M = 2P \cdot a$ .

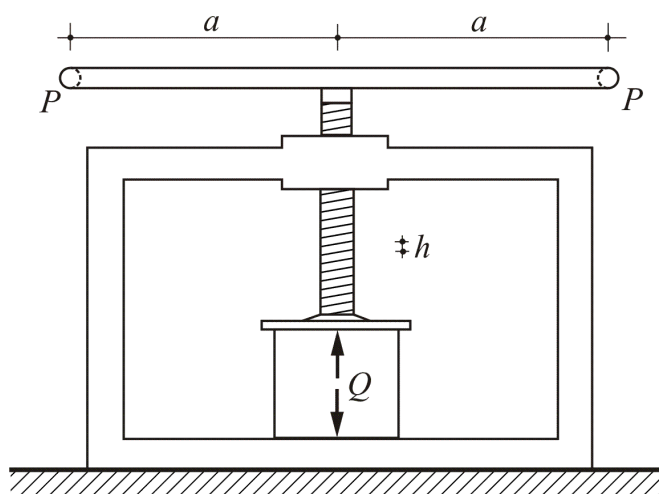
Αν  $h$  είναι το βήμα του σπειρώματος του κοχλία της πρέσας, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις δυνάμεις  $P$  του ζεύγους με την αντίδραση  $Q$  της πρέσας.

### Λύση

Θεωρούμε ότι το θλιβόμενο σώμα έχει αντικατασταθεί με τις αντιδράσεις  $Q$  τις οποίες ασκεί πάνω στον κοχλία και το πλαίσιο μηχανής.

Οι δυνάμεις αυτές θα πρέπει να θεωρηθούν ως εξωτερικές δυνάμεις του ιδεώδους συστήματος που αποτελείται από το πλαίσιο και τον κοχλία, τα οποία δεχόμαστε σαν απόλυτα στερεά σώματα.

Μια δυνατή μετατόπιση του συστήματος που να συμβιβάζεται με τους συνδέσμους του, είναι, όπως θα περίμενε κανείς, μια απειροστή στροφή  $\delta\theta$  του κοχλία, κατά την οποία, από το ζεύγος των δυνάμεων παράγεται έργο



$$\delta U_1 = M \cdot \delta\theta = 2P \cdot a \cdot \delta\theta.$$

Γνωστού όμως του βήματος  $h$  στο σπείρωμα του κοχλία, έπεται ότι στη γωνία  $\delta\theta$  αντιστοιχεί κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου του κοχλία, που είναι

$$\delta s_2 = \frac{\delta\theta}{2\pi} h,$$

και επομένως το έργο της δύναμης  $Q$  θα είναι αντίστοιχα

$$\delta U_2 = -Q \cdot \delta s_2 = -Q \cdot h \cdot \frac{\delta\theta}{2\pi}.$$

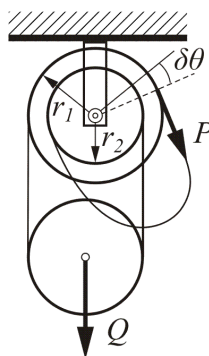
Το αρνητικό πρόσθετο του έργου της  $Q$  οφείλεται στην αντίθετη φορά της με τη μετακίνηση  $\delta s_2$  του κάτω άκρου του κοχλίου. Η προς τα κάτω δύναμη  $Q$  που ενεργεί στο πλαίσιο δεν παράγει έργο.

Έτσι θα έχουμε:

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow 2Pa\delta\theta - Qh\frac{\delta\theta}{2\pi} = 0, \text{ από όπου προκύπτει}$$

$$Q = \frac{4a\pi}{h}P = \frac{2\pi}{h}M.$$

**4** Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των δυνάμεων  $P$  και  $Q$  που ενεργούν στη διαφορική τροχαλία του παρακάτω σχήματος, όταν το σύστημα ισορροπεί.



### Λύση

Αν η επάνω τροχαλία, που δεν μετακινείται κατακόρυφα, στραφεί γύρω από τον άξονά της κατά απειροστή γωνία  $\delta\theta$ , τότε το έργο της δύναμης  $P$  θα είναι

$$\delta U_1 = P \cdot \delta s_1 = P \cdot r_1 \cdot \delta\theta.$$

Ταυτόχρονα όμως, η κάτω τροχαλία που φέρει το βάρος  $Q$ , μετακινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, επειδή το νήμα **έλξης** είναι μεγαλύτερο από το νήμα **απόλυσης**.

Η διαφορά,  $H$ , ανάμεσα στα μήκη των δύο νημάτων, επειδή μοιράζεται σε δύο διαδρομές, συνεπάγεται την κατακόρυφη ανύψωση της τροχαλίας κατά

$$h = \frac{H}{2} = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \cdot \delta\theta,$$

οπότε το έργο που παράγεται από το βάρος  $Q$  θα είναι

$$\delta U_2 = -Q \cdot h = -Q \frac{r_1 - r_2}{2} \cdot \delta\theta.$$

$$\text{Άρα } \sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot r_1 \delta\theta - Q \frac{r_1 - r_2}{2} \cdot \delta\theta = 0 ,$$

$$\text{οπότε } P = \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \cdot Q \quad \text{ή}$$

$$Q = \frac{2r_1}{r_1 - r_2} P$$

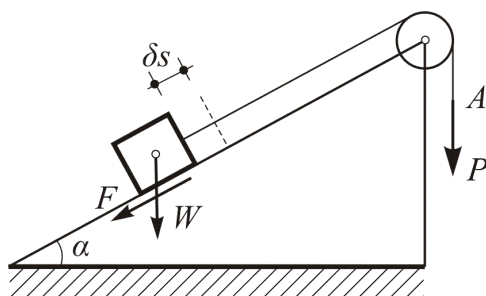
## 7.4 – Απόδοση απλών μηχανών

Σε όλες τις εφαρμογές της αρχής των δυνατών έργων που γνωρίσαμε ως τώρα, αναφερθήκαμε αποκλειστικά σε ιδεώδη συστήματα, όπου δεν υπάρχουν τριβές.

Αν και πολλές από τις μηχανές και συσκευές που χρησιμοποιούμε έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε να μπορούμε να αγνοούμε τις τριβές που παρουσιάζονται στα διάφορα εξαρτήματά τους, ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις, στις οποίες δεν έχουμε παρά να τις λάβουμε υπόψη.

Εφαρμόζοντας τότε την αρχή των δυνατών έργων, θα πρέπει, εκτός από το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις, να λαμβάνουμε υπόψη και το έργο των δυνάμεων τριβής.

Ας θεωρήσουμε τώρα για παράδειγμα το απλό σύστημα του επομένου σχήματος, που αποτελείται από κεκλιμένο επίπεδο με τροχαλία στην κορυφή του, για να μπορεί το βάρος  $W$  να σέρνεται προς τα άνω μέσω νήματος, από το βάρος  $P$ .



Αν η επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου δεν είναι λεία, τότε για τον υπολογισμό της δύναμης  $P$  που είναι απαραίτητη για να προκαλέσει την **έναρξη** της κίνησης του βάρους  $W$ , θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και την τριβή μεταξύ του βάρους  $W$  και της επιφάνειας του επιπέδου.

Έτσι, η εξίσωση που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων θα είναι

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot \delta s - W \eta \mu \alpha \cdot \delta s - F \cdot \delta s = 0 , \quad (\alpha)$$

όπου  $\delta s$  είναι απειροστή κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου  $A$  του νήματος και  $F$  η δύναμη τριβής μεταξύ του σώματος  $W$  και του επιπέδου.

Αν  $\mu$  είναι ο συντελεστής τριβής, η δύναμη  $F$  είναι

$$F = W\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \mu .$$

Αγνοώντας τις τριβές της τροχαλίας, η εξίσωση (α) γράφεται

$$P \cdot \delta s - W\eta\mu\alpha \cdot \delta s - W\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \mu \cdot \delta s = 0 ,$$

από την οποία προκύπτει

$$P = W(\eta\mu\alpha + \mu\sigma\upsilon\nu\alpha) \quad (\beta)$$

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (α), το έργο  $P \cdot \delta s$  που παράγεται από την εξωτερική δύναμη  $P$  κατά τη δυνατή μετατόπιση  $\delta s$ , χρησιμοποιείται όχι μόνο για την ανύψωση του βάρους  $W$  κατά το ύψος  $\delta s \cdot \eta\mu\alpha$ , αλλά και για την υπερνίκηση της τριβής.

Για το λόγο αυτό, το μεν έργο  $W\eta\mu\alpha \cdot \delta s$  ονομάζεται **χρήσιμο έργο**, ο δε λόγος αυτού προς το **καταναλισκόμενο έργο**  $P \cdot \delta s$  ονομάζεται **απόδοση μηχανής**.

Στο παράδειγμά μας μηχανή είναι το συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο που χρησιμοποιείται για ανύψωση βαρών  $W$ .

Αν λοιπόν με  $a$  παραστήσουμε την **απόδοση** της μηχανής του κεκλιμένου επιπέδου, θα είναι:

$$a = \frac{\text{Χρήσιμο έργο}}{\text{Καταναλισκόμενο έργο}} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} .$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η απόδοση της μηχανής γίνεται ίση με μονάδα για  $\mu = 0$ , δηλαδή όταν έχουμε την ιδεώδη περίπτωση ανυπαρξίας τριβών, και ότι αυτή μειώνεται όσο αυξάνουν οι τιμές του συντελεστή  $\mu$ .

Αν, αντί να ανυψώνουμε το σώμα  $W$ , το σέρναμε προς τα κάτω με δύναμη  $P$  παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο, τότε το μέτρο της απαραίτητης δύναμης  $P$  για την αντίστοιχη **έναρξη** της κίνησης προς τα κάτω, θα προέκυπτε από την εξίσωση

$$P \cdot \delta s + W\eta\mu\alpha \cdot \delta s - W\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \mu \cdot \delta s = 0 ,$$

$$\text{δηλαδή} \quad P = W(\mu\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha) .$$

$$\text{Αν} \quad \mu\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha = 0, \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\alpha = \mu ,$$

δηλαδή η κλίση του επιπέδου προς το οριζόντιο επίπεδο είναι ίση με τη γωνία τριβής, έστω  $\phi$ , η απαιτούμενη δύναμη για την έναρξη της κατολίσθησης είναι μηδέν.

Για κλίσεις μεγαλύτερες της γωνίας  $\varphi$ , το σώμα κατεβαίνει μόνο του. Όταν λοιπόν είναι  $\alpha = \varphi$ , δηλαδή  $\varepsilon\varphi\alpha = \mu$ , τότε η απόδοση της μηχανής είναι

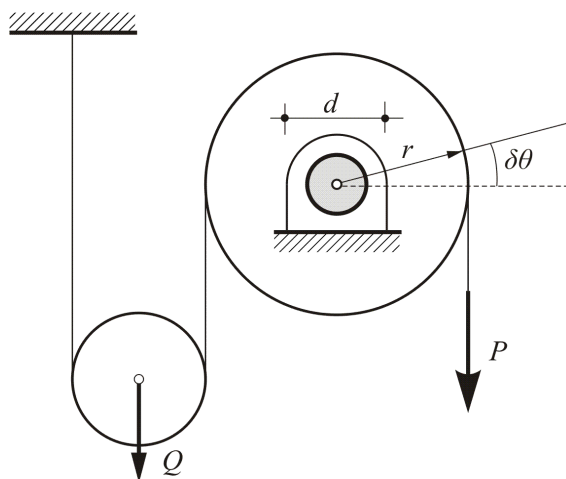
$$a = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{2}.$$

### Παραδείγματα

**1** Στο σύστημα των δύο τροχαλιών του σχήματος ανυψώνεται το βάρος  $Q$  με τη βοήθεια της δύναμης  $P$ . Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της μεγάλης τροχαλίας και του άξονά της είναι  $\mu = 0,25$ , η ακτίνα της τροχαλίας είναι  $r = 28 \text{ cm}$  και η διάμετρος του άξονα  $d = 8 \text{ cm}$ , να υπολογιστούν:

α) Το μέγεθος της δύναμης  $P$  που απαιτείται για την ανύψωση του βάρους  $Q$  και

β) Η απόδοση της μηχανής.



### Λύση

**α)** Κατά την εφαρμογή της δύναμης  $P$ , θεωρούμε απειροστή περιστροφή της μεγάλης τροχαλίας κατά  $\delta\theta$ . Τότε η δύναμη  $P$  παράγει έργο

$$\delta U_1 = P \cdot \delta s_1 = P \cdot r \cdot \delta\theta.$$

Ταυτόχρονα, παράγεται αρνητικό έργο τόσο από το βάρος  $Q$  της μικρής τροχαλίας όσο και από τη δύναμη στατικής τριβής  $F$  που αναπτύσσεται ανάμεσα στη μεγάλη τροχαλία και τον άξονά της.

Το έργο του βάρους  $Q$  είναι

$$\delta U_2 = -Q \cdot \delta s_2,$$



όπου  $\delta s_2 = \frac{\delta s_1}{2} = \frac{r}{2} \delta \theta$  είναι η κατακόρυφη ανύψωση του βάρους Q.

Αντίστοιχα, το έργο τριβής είναι

$$\delta U_3 = -F \cdot \delta s_3 = -N \cdot \mu \cdot \delta s_3 ,$$

όπου  $N = 2P$  είναι η κατακόρυφη αντίδραση που ασκείται στη μεγάλη τροχαλία από τον άξονά της, και  $\delta s_3 = \frac{d}{2} \delta \theta$  η περιφεριακή μετακίνηση του εσωτερικού μανδύα της τροχαλίας που αντιστοιχεί στη γωνία  $\delta \theta$ .

Έτσι, η αρχή των δυνατών έργων, μετά τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, διατυπώνεται με την εξίσωση

$$\sum \delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot r \cdot \delta \theta - Q \frac{r}{2} \delta \theta - 2P \cdot \mu \cdot \frac{d}{2} \delta \theta = 0 ,$$

από όπου προκύπτει

$$P(r - \mu \cdot d) = \frac{Q \cdot r}{2} \quad \text{και} \quad P = \frac{r}{2(r - \mu \cdot d)} Q .$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει

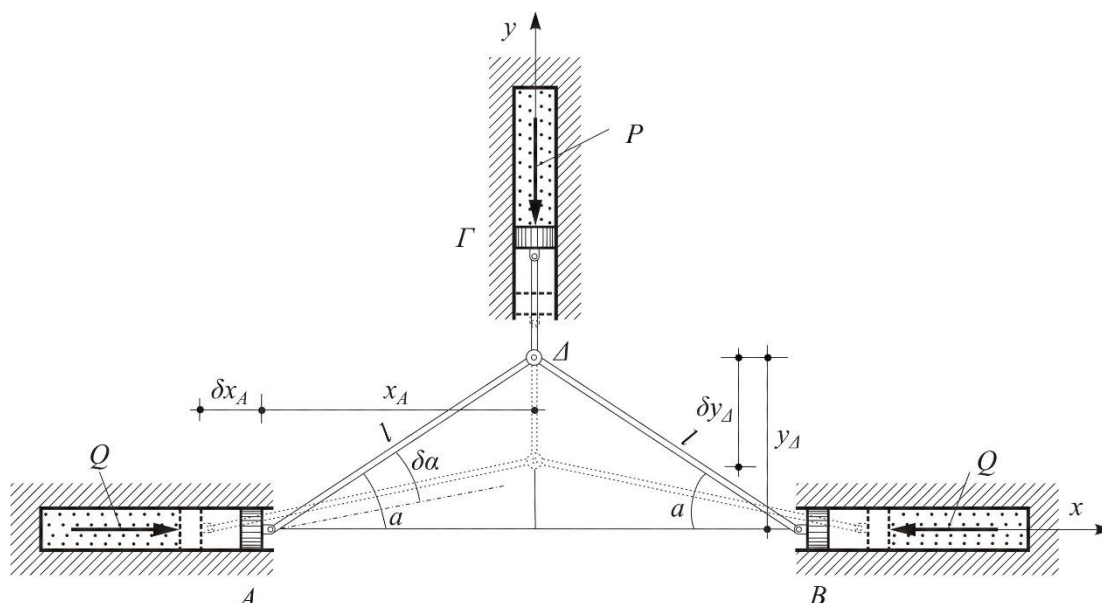
$$P = \frac{28}{2 \cdot (28 - 0,25 \cdot 8)} Q = 0,538 Q .$$

**β)** Η απόδοση  $a$  της μηχανής θα βρεθεί αν διαιρέσουμε το χρήσιμο έργο, που είναι η απόλυτη τιμή του έργου του βάρους Q, δια του έργου που καταναλίσκεται, και αυτό είναι το έργο της δύναμης P. Έτσι θα έχουμε

$$a = \frac{Q \frac{r}{2} \delta \theta}{P \cdot r \cdot \delta \theta} = \frac{\underline{Q}}{\underline{P}} = \frac{\underline{Q}}{0,538 \cdot \underline{Q}} = \frac{0,5}{0,538} = 0,929 .$$

**2** Στο μηχανισμό του σχήματος, να υπολογιστεί η δύναμη  $P$  που πρέπει να εφαρμοστεί στο έμβολο  $\Gamma$ , ώστε να προκαλέσει στα έμβολα  $A$  και  $B$  γνωστή δύναμη  $Q$ , και στη συνέχεια η απόδοσή του.

Ο συντελεστής τριβής για τις επιφάνειες που ολισθαίνουν είναι  $\mu$ , ενώ στις αρθρώσεις είναι αμελητέος.



### Λύση

Έστω  $\delta y_{\Delta}$  η απειροστή κατακόρυφη μετατόπιση της άρθρωσης  $\Delta$  που εμφανίζεται μετά την εφαρμογή της δύναμης  $P$  στο έμβολο  $\Gamma$ .

Επειδή κατά τη μετακίνηση αυτή μεταβάλλεται συμμετρικά η γωνία  $\alpha$  των πλαγίων διωστήρων, θα πρέπει η υποχώρηση  $\delta y_{\Delta}$  να υπολογιστεί σε σχέση με αυτή τη γωνία.

Για το σκοπό αυτό συσχετίζουμε τη θέση του σημείου  $\Delta$  από το σταθερό άξονα  $x$ , ο οποίος ταυτίζεται με την  $AB$ , οπότε η απόσταση  $y_{\Delta}$ , συναρτήσει της  $\alpha$ , είναι

$$y_{\Delta} = l \cdot \eta\mu\alpha \ .$$

Διαφορίζοντας ως προς  $\alpha$ , βρίσκουμε ότι η ζητούμενη μετατόπιση είναι

$$\delta y_{\Delta} = l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \delta\alpha \ .$$

Με το ίδιο σκεπτικό, αν  $x_A$  είναι η οριζόντια απόσταση του εμβόλου  $A$  από το σταθερό άξονα  $y$ , που ταυτίζεται με το διωστήρα  $\Gamma\Delta$ , θα είναι

$$x_A = l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{και} \quad \delta x_A = -l \cdot \eta\mu\alpha \cdot \delta\alpha \ .$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η απόσταση  $x_A$  μικραίνει όταν αυξάνεται η γωνία  $\alpha$  και αντίστροφα, χωρίς να συσχετίζεται με το έργο της αντίστοιχης δύναμης.

Κατά τη διάρκεια των μετακινήσεων αυτών, το έργο που παράγει η δύναμη  $P$  εξουδετερώνεται από το αρνητικό έργο που παράγουν οι δυνάμεις  $Q$ , μαζί με τις δυνάμεις τριβής  $F$ .

Οι τελευταίες προκύπτουν αν η κατακόρυφη αντίδραση  $N$  του καθενός από τα έμβολα  $A$  και  $B$ , (η οποία λόγω συμμετρίας είναι ίση με  $P/2$ ), πολλαπλασιαστεί με το συντελεστή τριβής  $\mu$ .

Έτσι, η εξίσωση που εκφράζει την αρχή των δυνατών έργων, είναι

$$\sum \delta U = 0 \Rightarrow P \cdot \delta y_{\Delta} - 2Q \cdot \delta x_A - 2F \cdot \delta x_A = 0$$

$$\text{ή} \quad P \cdot \delta y_{\Delta} - 2Q \cdot \delta x_A - 2 \frac{P}{2} \cdot \mu \cdot \delta x_A = 0, \quad \text{δηλαδή}$$

$$P(\delta y_{\Delta} - \mu \cdot \delta x_A) = 2Q \delta x_A.$$

Θέτοντας ήδη στην τελευταία σχέση τις τιμές των μετακινήσεων που βρήκαμε παραπάνω, παίρνουμε

$$P(l \sin \alpha \cdot \delta \alpha - \mu \cdot l \cdot \eta \mu \alpha \cdot \delta \alpha) = 2Q \cdot l \cdot \eta \mu \alpha \cdot \delta \alpha, \quad \text{δηλαδή}$$

$$P(\sin \alpha - \mu \cdot \eta \mu \alpha) = 2Q \cdot \eta \mu \alpha.$$

Διαιρώντας ήδη δια  $\sin \alpha$ , προκύπτει

$$P(1 - \mu \cdot \epsilon \phi \alpha) = 2Q \cdot \epsilon \phi \alpha,$$

και τελικά

$$P = \frac{2Q \cdot \epsilon \phi \alpha}{1 - \mu \cdot \epsilon \phi \alpha}.$$

Όσον αφορά στην απόδοση του μηχανισμού, αυτή θα βρεθεί αν υπολογίσουμε το λόγο του ωφέλιμου έργου των δυνάμεων  $Q$ , προς το καταναλισκόμενο της  $P$ . Δηλαδή θα είναι

$$a = \frac{2Q \cdot \delta x_A}{P \cdot \delta y_{\Delta}},$$

ή, μετά την αντικατάσταση της τιμής της  $P$ ,

$$\alpha = \frac{2Q \cdot l \cdot \eta \mu \alpha \cdot \delta \alpha}{\frac{2Q \epsilon \phi \alpha}{1 - \mu \cdot \epsilon \phi \alpha} \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \delta \alpha} = 1 - \mu \cdot \epsilon \phi \alpha$$

## Βιβλιογραφία

1. Αναστασίας Σωτηροπούλου, ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΙ, Υπερστατικοί φορείς, Αθήνα 2015.
2. Παναγιώτη Κ. Κολιόπουλου, Σημειώσεις Εργαστηρίου "ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΙ", Σέρρες.
3. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Σημειώσεις Υπολογισμών Κατασκευών Ι, Λάρισα, 1977.
4. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Αρχές και μέθοδοι στην Αντοχή των Υλικών, Λάρισα, 1988.
5. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Αρχές και Μέθοδοι στην Τεχνική Μηχανική, Λάρισα, 1990.
6. Ευτ. Κοκκινόπουλου, Στατική, Αθήνα, 1968.
7. Κωνστ. Χ. Γεωργικόπουλου, Μηχανική των Στερεών Σωμάτων, Αθήνα, 1968.
8. Κωνστ. Χ. Γεωργικόπουλου, Γραφοστατική, Αθήνα, 1967.
9. Γ. Μ. Νιτσιώτα, Εισαγωγή εις την Στατικήν, Θεσσαλονίκη, 1965.
10. Γιάννη Γαλάνη - Παναγιώτη Ντόβα, Τεχνική Μηχανική, Αθήνα, 1983.
11. Γεωργίου Ρ. Γκρος - Λαζάρου Ε. Λαζαρίδη, Μηχανική, Αθήνα, 1989.
12. Π.Α. Βουθούνη, Τεχνική Μηχανική, Αθήνα, 1994.
13. Π.Α. Βουθούνη, Μηχανική του Απαραμόρφωτου στερεού - Στατική, Αθήνα, 1994.
14. Π.Α. Βουθούνη, Τεχνική Μηχανική Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, 2002.
15. Π.Α. Βουθούνη, Μηχανική παραμορφώσιμου στερεού Ι - Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, 2002.
16. S. Timoshenko, D.H. Young, Μηχανική, Αθήνα, 1964.
17. Gere & Timoshenko, Mechanics of Materials, Stanford University, Monterey, California.

18. Prof. Walter Wagner / Prof. Gerhard Erhof,  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΚΗ, Αθήνα, 1998
19. Raymond F. Neathery, Statics and Applied Strength of  
Materials, Canada, 1985.

## Ευρετήριο

αδράνεια	11	δυνατή μετατόπιση	141
αμφιέρεστη δοκός	26	Δυσμενείς φορτίσεις	60
αμφιπροέχουσα	27	δυσμενής θέση συρμού	135
ανάλυση	16	εξίσωση τριών ροπών	84
αντιδράσεις	29	εξωτερικά στατικά ορισμένος	28
Αντιδράσεις	20	Εξωτερικά φορτία	29
αντίδραση	17	επαλληλία	11
αξονική δύναμη	33	επίπεδοι φορείς	25
απαραμόρφωτος	8	Επιφανειακοί φορείς	25
Απλά δικτυώματα	101	εσωτερικά στατικά ορισμένος	27
Απόδοση απλών μηχανών	150	ευθύγραμμοι φορείς	26
απόδοση μηχανής	151	Ζεύγος δυνάμεων	16
Άρθρωση	21, 28	Η μέθοδος Cross	73
αρθρωτή δοκός	27	θεμελιώδεις ροπές	73
αρχή δυνατών έργων	144	θέση συρμού	135
Αρχή δυνατών έργων	140	ιδεώδη συστήματα	145
ατένεια	66	Ισοστατικός	21
αυτεντατική κατάσταση	65	ισοστατικότητα	56
βαθμός ελευθερίας	141	Καθολική φόρτιση	61
βαθμός στατικής αοριστίας	65	καμπτική ροπή	34
Γραμμές Επιρροής	129	καταναλισκόμενο έργο	151
Γραμμικοί φορείς	26	κατανεμημένο	20
δείκτες ακαμψίας	74	Κατασκευή διαγραμμάτων Q, M	39
δικτύωμα	101	Κέλυφος	19
δίσκοι	25	κελυφωτοί φπρείς	25
Δίσκος	19	κεντροειδές	31
Δοκός	18	Κινηματική	8
δοκός Gerber	22, 55	Κινητά φορτία	135
Δράση	17	Κινητική	9
δράση και αντίδραση	11	κόμβοι δικτυώματος	101
δύναμη	13	κύλιση	20, 28
Δύναμη παγίωσης	79	Μάζα	12
Δυναμική	8	μέθοδος Cremona	108
δυνατά έργα	140	μέθοδος Cross	66, 73
Δυνατά έργα	142	μέθοδος ισορροπίας κόμβων	103
Δυνατές μετατοπίσεις	140	μέθοδος των δυνάμεων	89

μέθοδος των Παραμορφώσεων	66	συμβιβαστό παραμορφώσεων	71
μέθοδος των τομών	114	συμπαγής δοκός	27
μέτρο	13	συνεχής δοκός	27
Μη πάγιος φορέας	66	σύνθεση	16
μονοπροέχουσα	27	Σύνθετα δικτυώματα	101
μονοτρόχιος μηχανισμός	102	Συνισταμένη	16
Μόρφωση δικτυώματος	102	συνιστώσες	16
μοχλοβραχίονας	16	συντελεστές κατανομής	75
ολισθαίνον διάνυσμα	14	συρμός δυο φορτίων	136
ομοιόμορφο	20	σχέσεις μεταξύ $q$ , $Q$ & $M$	37
Πάκτωση	21, 29	Σώμα	12
παραβολικό	20	τέμνουσα δύναμη	34
παράμετρος συστήματος	141	τοξωτοί φορείς	26
παρατηρήσεις στα διαγράμματα	60	τραπεζοειδές	20
πλαισιωτοί φορείς	26	τριαρθρωτό τόξο	22
Πλάκα	19	Τριαρθρωτοί φορείς	125
πλάκες	25	τριγωνικό	20
πλεονάζουσα ροπή	73	Τροχιά	13
πρακτική χρησιμότητα Γ.Ε.	131	Ύλη	12
πρόβολος	27	Υλικό σημείο	12
Ράβδος	18	Υπερστατικοί φορείς	65
Ροπές πάκτωσης	69	υπερστατικός	21
Ροπή δύναμης	15	φορέας	8
ροπή κάμψης	34	Φορέας	18
Σήμανση φορτίων διατομής	34	Φορτία	20
σημείο εφαρμογής	13	φορτία διατομής	32
στατικά ορισμένος	28	φορτικούς συντελεστές	84
Στερεό	12	Φόρτιση δύο προβόλων	62
στερεότητα	56	Φόρτιση μόνο ανοίγματος	63
Στηρίξεις	20	φυσικό σύστημα MKS	15
Στήριξη	18	χρήσιμο έργο	151
συγκεντρωμένο	20	Χωρικοί φορείς	25