



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
73<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
**20 Οκτωβρίου 2012**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

**Λύση**

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right) = \frac{88}{5} \cdot \frac{5}{44} - \frac{39}{5} \cdot \frac{5}{39} = 2 - 1 = 1.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο  $\kappa$  είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του  $\kappa$  και της παράστασης:

$$B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{3 - \kappa}{\kappa}.$$

**Λύση**

Είναι  $\text{ΜΚΔ}(12, 30, 54) = 6$ . Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε  $\kappa = 2$  ή  $\kappa = 3$ .

$$\text{Για } \kappa = 2 \text{ έχουμε: } B = \frac{2 - \frac{2}{2}}{2 - \frac{1}{2}} : \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{3}.$$

Για  $\kappa = 3$  ο διαιρέτης  $\frac{3-\kappa}{2}$  της παράστασης B γίνεται  $\frac{3-3}{2} = 0$ , ενώ ο διαιρέτης  $\frac{3-\kappa}{\kappa}$  της παράστασης B γίνεται  $\frac{3-3}{3} = 0$ , ενώ ο διαιρέτης  $\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \neq 0$ , οπότε η παράσταση B δεν ορίζεται.

### Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

- (α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
- (β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

### Λύση

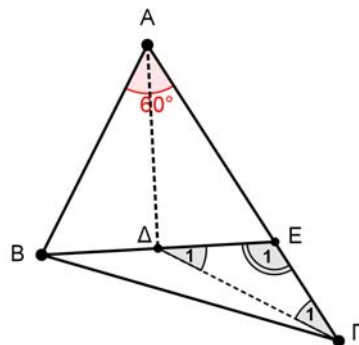
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι  $2,5 \cdot \frac{6}{100} = 0,15$  ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι  $2,5 - 0,15 = 2,35$  ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι  $1050 + 407 = 1457$  ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει  $1457 : 2,35 = 620$  κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει  $800 \cdot \frac{8}{100} = 64$  κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό  $800 - (620 + 64) = 116$  κιλά λάδι.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$ . Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά AΓ τέτοιο ώστε  $AE = AB$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔEΓ.

### Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με  $\alpha$  το μήκος του τμήματος  $AB$ , δηλαδή:  $AB = \alpha$ .

Εφόσον  $AG = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$  και  $AE = AB = \alpha$ , έχουμε:

$$EG = AG - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές ( $AB = AE$ ) και η γωνία του  $\hat{A}$  είναι  $60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του  $AD$  είναι και διάμεσος.

Άρα είναι  $DE = \frac{\alpha}{2}$  και το τρίγωνο  $DEG$  είναι ισοσκελές, αφού  $DE = EG = \frac{\alpha}{2}$ .

Η γωνία  $\hat{E}_1$  είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου  $ABE$ . Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - \hat{AEB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε:  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ .

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

#### Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = (2^2)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = (2^3)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = (2^{-10})^2 \cdot (2^{-16})^4 \cdot (2^{-18})^6 \cdot 2^{182} \\ &= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}. \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} B &= 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1} = 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6)^{-1} = 3 \cdot [2^2 \cdot 3^3 (13 + 2^2 \cdot 3^3)]^{-1} \\ &= 3 \cdot (2^2 \cdot 3^3 \cdot 121)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

#### Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

#### Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot 3 - 5\alpha + 2 < \alpha(3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow 12 - 5\alpha + 2 < 2\alpha - 2 \Leftrightarrow 16 < 7\alpha \Leftrightarrow \alpha > \frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot (-3) - 5\alpha + 2 < \alpha(-3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow -12 - 5\alpha + 2 < -6\alpha + 2\alpha - 2$$

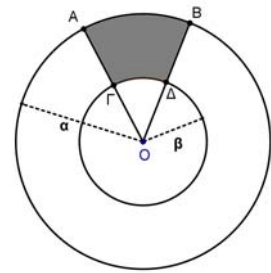
$$\Leftrightarrow -8 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > -8$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις  $\alpha > \frac{16}{7}$  και  $\alpha > -8$ , δηλαδή όταν  $\alpha > \frac{16}{7}$ .

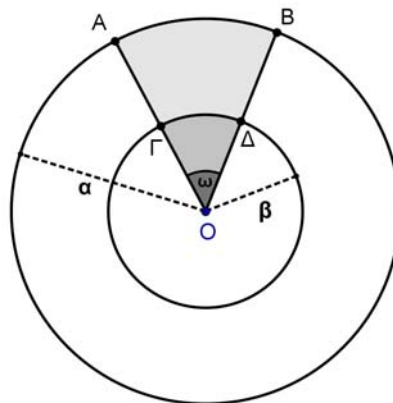
### Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $AB\Delta\Gamma$  του διπλανού σχήματος ισούται με το  $\frac{1}{12}$  του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους  $(O, \alpha)$  και  $(O, \beta)$ ,  $0 < \beta < \alpha$ , να βρείτε τη γωνία  $\omega = \widehat{A\hat{O}B}$  και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left( 2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



### Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου  $AB\Delta\Gamma$  ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων  $(O, \widehat{AB})$  και  $(O, \widehat{G\Delta})$ , δηλαδή είναι

$$E(AB\Delta\Gamma) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} - \pi\beta^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους  $(O, \alpha)$  και  $(O, \beta)$ ,  $0 < \beta < \alpha$ , ισούται με  $E(O, \beta, \alpha) = \pi(\alpha^2 - \beta^2)$ , οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{E(AB\Delta\Gamma)}{E(O, \beta, \alpha)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι  $\eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , έχουμε

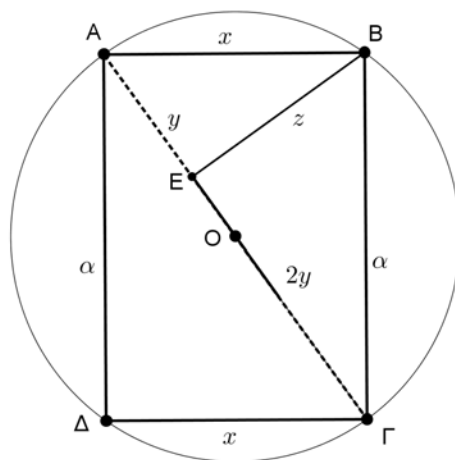
$$\Sigma = \left( 2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3 = \left( 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta = \alpha$  cm και  $AB < A\Delta$ . Η κάθετη από την κορυφή  $B$  προς τη διαγώνιο  $A\Gamma$  την τέμνει στο σημείο  $E$ . Αν ισχύει ότι  $E\Gamma = 2 \cdot AE$ , να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς  $AB$
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

#### Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω  $AB = \Gamma\Delta = x$ ,  $AE = y$ ,  $E\Gamma = 2y$  και  $BE = z$ .

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $ABE$  έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \quad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $B\Gamma E$  έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \quad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3 \cdot \frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η  $A\Gamma = 3y$ , οπότε η ακτίνα του είναι

$$R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}. \text{ Το εμβαδόν του κύκλου είναι } E = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι  $x$  που είναι ρίζες της εξίσωσης  $x(x-2) = 24$  και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

#### Λύση

Η εξίσωση  $x(x-2) = 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$  είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα  $\Delta = 100$ , οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x = \frac{2 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα  $x = -4$ , γιατί  $(-4)^2 = 16 < 25$ , ενώ  $6^2 = 36 > 25$ .

### Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta)}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta},$$

αν  $\alpha + \beta \neq 0$  και  $\alpha + \beta \neq 1$ .

#### Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta) \\ &= \alpha^3 + \beta^3 - (\alpha^2 - \beta^2) + \beta(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta + \beta\alpha - 2\beta^2) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)] \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1). \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)$$

Άρα, αφού  $\alpha + \beta \neq 0$  και  $\alpha + \beta \neq 1$ , έχουμε

$$K(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)} = \alpha - \beta.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

#### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 1) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες  $x_1 = -\lambda + 1$  και  $x_2 = -\lambda - 1$ .

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα  $(-5, 2)$ , όταν

$$\begin{aligned} -5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 &\Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3 \\ &\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4. \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε

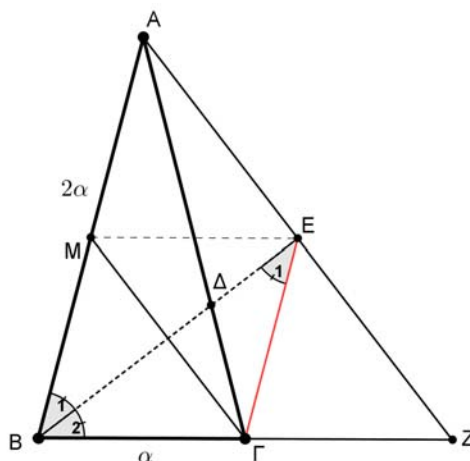
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει  $-1 < \lambda < 4$  το ζητούμενο ισχύει για  $\lambda = 3$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = \alpha$  και  $AB = A\Gamma = 2\alpha$ . Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή  $\Gamma$  προς την πλευρά  $AB$  τέμνει την ευθεία της διχοτόμου  $B\Delta$  στο σημείο  $E$ . Η ευθεία  $AE$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

#### Λύση



Σχήμα 4

Επειδή  $E\Gamma \parallel AB$ , θα ισχύει  $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$  και αφού η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , θα είναι  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ . Επομένως έχουμε  $\hat{B}_2 = \hat{E}_1$  και κατά συνέπεια το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισοσκελές, δηλαδή:  $B\Gamma = \Gamma E = \alpha$ .

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

**1<sup>ος</sup> τρόπος.** Λόγω της παραλληλίας των  $E\Gamma$ ,  $AB$  θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα  $E\Gamma Z$  και  $ABZ$ , από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\Gamma Z}{BZ} = \frac{E\Gamma}{AB} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow BZ = 2 \cdot \Gamma Z$$

Επομένως το σημείο  $\Gamma$  είναι το μέσο της  $BZ$ , δηλαδή  $BZ = 2 \cdot B\Gamma = 2\alpha$ . Επειδή είναι και  $AB = 2\alpha$  το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Θεωρούμε το μέσο  $M$  της  $AB$ . Τότε το τετράπλευρο  $B\Gamma E M$  είναι ρόμβος, διότι: έχει  $BM \parallel \Gamma E = \alpha$  (οπότε  $B\Gamma E M$  παραλληλόγραμμο) και  $B\Gamma = \Gamma E = \alpha$  (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα  $ME = \frac{BZ}{2}$  και κατά συνέπεια το  $E$

είναι μέσο του  $AZ$ . Επομένως στο τρίγωνο  $ABZ$ , η  $BE$  είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν  $\kappa \alpha \neq 0$  και  $-1 < \alpha < 1$  να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha$ ,

όπου

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

### Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι  $1+\alpha > 0$  και  $1-\alpha > 0$ , οπότε

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι  $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , για όλες τις τιμές του  $\alpha$ , έπεται ότι η παράσταση  $K$  έχει το πρόσημο του  $\alpha$ , δηλαδή θετικό, αν  $0 < \alpha < 1$  και αρνητικό, αν  $-1 < \alpha < 0$ .

### Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\kappa$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα  $(0,5)$  με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4(-1 + \kappa^2) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες  $x_1 = \kappa + 1$  και  $x_2 = \kappa - 1$ .

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα  $(0,5)$ , όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \quad \text{και} \quad 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \quad \text{και} \quad 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa + 1)^4 + (\kappa - 1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \quad \text{ή} \quad \kappa^2 = -10 \quad (\text{αδύνατη}) \Leftrightarrow \kappa = 2 \quad \text{ή} \quad \kappa = -2.$$

Επομένως για  $\kappa = 2$  ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή  $\kappa = -2$  απορρίπτεται λόγω της σχέσης  $1 < \kappa < 4$ .



### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους  $x, y$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  είναι διαιρέτης του 747.

### Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2012x+3}{x} &= \frac{2012y+5}{y} = \frac{2012z+7}{z} \\ \Leftrightarrow 2012 + \frac{3}{x} &= 2012 + \frac{5}{y} = 2012 + \frac{7}{z} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{x} &= \frac{5}{y} = \frac{7}{z} \end{aligned}$$

οπότε, αν θέσουμε  $\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$  έπεται ότι:  $x = 3\lambda, y = 5\lambda, z = 7\lambda$ .

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 83\lambda^2 \mid 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το  $\lambda^2$  είναι οι 1, 3 και 9.

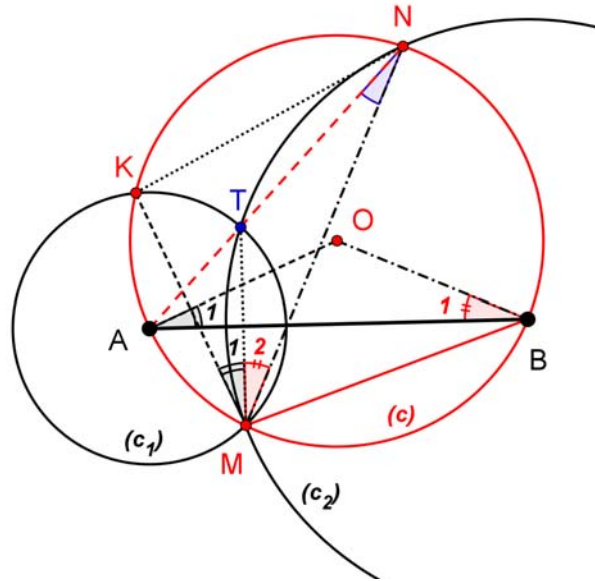
- Για  $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$  έπεται ότι  $(x, y, z) = (3, 5, 7)$  ή  $(x, y, z) = (-3, -5, -7)$ .
- Για  $\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$  προκύπτουν για τα  $x, y, z$  μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για  $\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$  έπεται ότι  $(x, y, z) = (9, 15, 21)$  ή  $(x, y, z) = (-9, -15, -21)$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$ , τυχούσα χορδή του  $AB$  (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο  $M$  του μικρού τόξου  $AB$ . Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $K$  και  $N$  αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνονται στα σημεία  $M$  και  $T$ . Να αποδείξετε ότι το σημείο  $T$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $KMN$ .

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η  $KM$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c(O, R)$  και  $c_1(A, AM)$ . Άρα  
 η  $OA$  είναι μεσοκάθετη της  $KM$ . (1)

Η  $MT$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$ . Άρα  
 η  $AB$  είναι μεσοκάθετη της  $MT$ . (2)

Η  $MN$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c(O, R)$  και  $c_2(B, BM)$ . Άρα  
 η  $OB$  είναι μεσοκάθετη της  $MN$ . (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$$\hat{A}_1 = \hat{M}_1 \text{ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).}$$

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$$\hat{B}_1 = \hat{M}_2 \text{ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)}$$

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο  $OAB$ , έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα:  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ .

Η γωνία  $\hat{A}\hat{N}M$  και  $\hat{A}\hat{B}M$  είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνουν στο τόξο  $\widehat{AM}$ .

Η γωνία  $\hat{T}\hat{N}M$  είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο  $c_2(B, BM)$ , οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας  $\hat{T}\hat{B}M$ , δηλαδή:  $\hat{T}\hat{N}M = \hat{A}\hat{B}M$

Άρα  $\hat{A}\hat{N}M = \hat{T}\hat{N}M$  και κατά συνέπεια τα σημεία  $A, T, N$  είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα  $\hat{A}\hat{N}K = \hat{A}\hat{N}M$  (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνουν στα ίσα τόξα  $AM$  και  $AK$ ). Επομένως η  $NA$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{K}\hat{N}M$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+x} = \frac{2011}{2013}.$$

### Λύση

Επειδή  $1+2+3+\dots+x = \frac{x(x+1)}{2}$ , για κάθε θετικό ακέραιο  $x$ , η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} &= \frac{2011}{2013} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{2011}{2013} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{2011}{2013} &\Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2013} \Leftrightarrow x = 2012. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = ax^2 + bx + c$  και  $g(x) = cx + b$ , όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων  $a, b, c$  καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

### Λύση

Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = cx + b \Leftrightarrow ax^2 + (b-c)x + (c-b) = 0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta = (b-c)^2 + 4a(b-c) = 0 \Leftrightarrow (b-c)(b-c+4a) = 0 \Leftrightarrow c-b = 4a,$$

αφού  $b \neq c$ .

Όταν  $c-b = 4a$  η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2 - 4ax + 4a = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το  $M(2, 2c+b)$ .

### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y} = \frac{y}{2012y+z} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  ισούται με 147.

### Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x} = \frac{2012y+z}{y} = \frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012 + \frac{y}{x} = 2012 + \frac{z}{y} = 2012 + \frac{7}{z} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε  $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$  έπεται ότι:  $x = 7\lambda^3$ ,  $y = 7\lambda^2$ ,  $z = 7\lambda$ .

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 147 \Leftrightarrow 49\lambda^6 + 49\lambda^4 + 49\lambda^2 = 147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda^6 - 1 + \lambda^4 - 1 + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + 1 + \lambda^2 + 1 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1,$$

αφού η εξίσωση  $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3 = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -8 < 0$ .

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

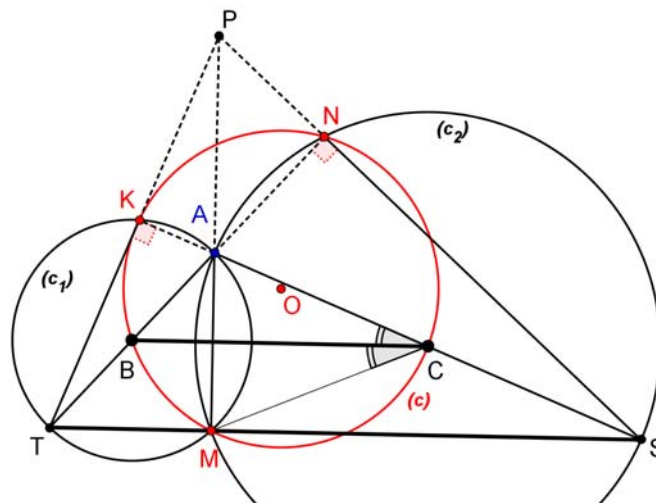
$$(x, y, z) = (7, 7, 7) \text{ ή } (x, y, z) = (-7, 7, -7)$$

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$ , τυχούσα χορδή του  $BC$  (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο  $M$  του μικρού τόξου  $BC$ . Οι κύκλοι  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $K, N$ , αντίστοιχα, και οι κύκλοι  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $M$ . Η παράλληλος από το σημείο  $M$  προς την  $BC$  τέμνει τους κύκλους  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  στα σημεία  $T, S$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $AM, KT, NS$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

#### Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία  $K, A, C, S$  και  $N, A, B, T$  είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η  $AM$  είναι η κοινή χορδή των κύκλων  $c_1(B, BM)$  και  $c_2(C, CM)$ .

Άρα η διάκεντρος τους  $BC$  είναι μεσοκάθετη της  $AM$ .

Η  $BC$  όμως είναι παράλληλη με την  $TS$  (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η  $TS$  είναι κάθετος με την  $AM$  ( $AM \perp TS$ ). Δηλαδή  $\hat{A}MT = \hat{A}MS = 90^\circ$ .

Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία  $A, T$  και  $A, S$  είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους  $c_1(B, BM)$  και  $c_2(C, CM)$  αντίστοιχα.

Επομένως, τα σημεία  $A, C, S$  και  $A, B, T$  είναι συνευθειακά.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $K, A, C$  και  $N, A, B$  είναι συνευθειακά.

Στον κύκλο  $c(O, R)$ , το σημείο  $B$  είναι μέσο του τόξου  $KM$  (διότι  $BM, BK$  είναι ακτίνες του κύκλου  $c_1(B, BM)$ ). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα  $BM$  και  $BK$  γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$\hat{K}CB = \hat{M}CB \quad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος  $BC$  είναι μεσοκάθετη της  $AM$ , τα τρίγωνα  $ABC$  και  $MBC$  είναι ίσα, οπότε :

$$\hat{A}CB = \hat{M}CB \quad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι  $\hat{K}CB = \hat{A}CB$  και κατά συνέπεια τα σημεία  $K, A, C$  είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία  $N, A, B$  είναι επίσης συνευθειακά.

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα  $AMTK$  και  $AMSN$  συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{A}KT = \hat{A}NS = 90^\circ.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες  $TK \perp KS$  και  $TN \perp NS$ .

Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα  $AM \perp TS$ , συμπεραίνουμε ότι τα  $AM, KT, NS$  είναι ύψη του τριγώνου  $ATS$ , οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

### Παρατηρήσεις

Έστω  $P$  το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ATS$ . Τότε τα σημεία  $P, A, T, S$  αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο  $A$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $PTS$ .

Το τρίγωνο  $KMN$  είναι ορθικό του τριγώνου  $PTS$  και κατά συνέπεια το σημείο  $A$  είναι έκκεντρο του τριγώνου  $KMN$ .