ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση
(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:
το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε $1600\,\text{ευρώ}$.
Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

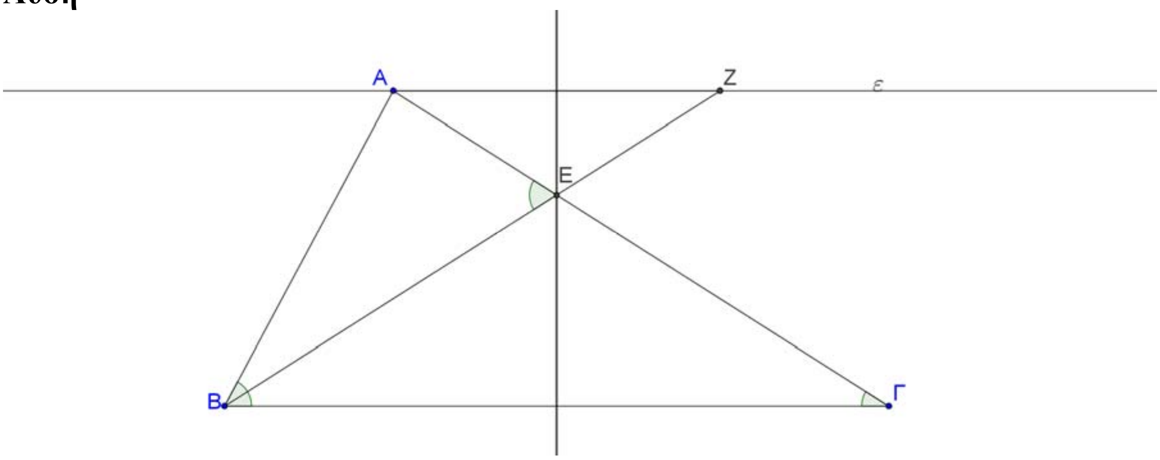
Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.
(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{\text{Β}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\text{ΑΖ} = \text{ΑΒ}$,   **(β)** $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \hat{\text{Β}}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $\text{ΕΒ} = \text{Ε}\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $\text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Επειδή $\text{ΑΖ} \parallel \text{Β}\Gamma$ έπεται ότι: $\text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Β}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{\text{Β}} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{\text{Β}}}{2} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ζ}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.
(β) Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{\text{Β}}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon .$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110 .$$

2^{ος} τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10, 2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\mathrm{MK\Delta}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

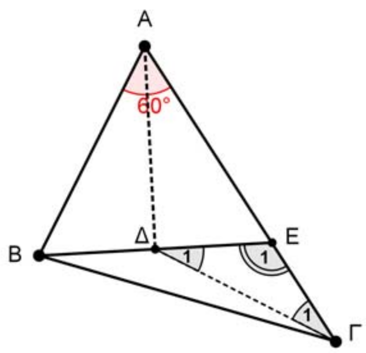
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5 - 0,15 = 2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2,35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \dfrac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $AB = \alpha$.

Εφόσον $A\Gamma = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$ και $AE = AB = \alpha$, έχουμε:

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$) και η γωνία του $\hat{A}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta E = \frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $\Delta E = E\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - A\hat{E}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^o$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $\mathrm{B}=\frac{2}{2-\frac{1}{5}}:\frac{2-\frac{2}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{9}{5}}:\frac{2-1}{9}=\frac{10}{9}:\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}:\frac{5-\frac{5}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{24}{5}}:\frac{\frac{5}{2}}{9}=\frac{10}{24}:\frac{5}{18}=\frac{10}{24}\cdot\frac{18}{5}=\frac{180}{120}=\frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7\,.$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^{\circ}$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^{0}$.

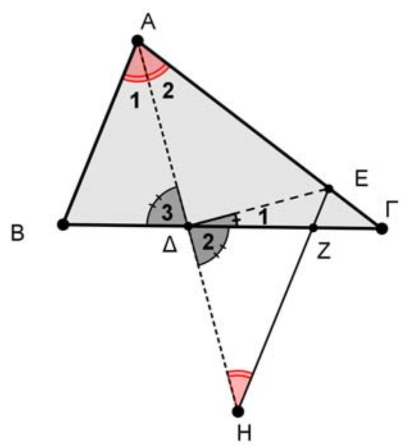
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{H}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\mathrm{H}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\mathrm{E\Delta}\perp\mathrm{AH}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^{\circ}$



2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^{\circ}$, θα ισχύει:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^{\circ}-\hat{\Delta}_2=90^{\circ}-\hat{\Delta}_3\,.$$

Σχήμα 1

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^{\circ}-\hat{\Delta}_2=90^{\circ}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^{\mathrm{o}}}{2}=10^{\mathrm{o}}\,.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16,\ 32,\ 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $Ι\hat{Δ}Γ = 70^0$ και $Ι\hat{Ε}Γ = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $Β\hat{Ι}Δ$ και $Ε\hat{Ι}Γ$.

Λύση

α. Εφόσον $ΙΔ//ΑΒ$ θα ισχύει: $\hat{Β} = \hat{Δ}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΔ, ΑΒ$ τεμνομένων από την $ΒΔ$).

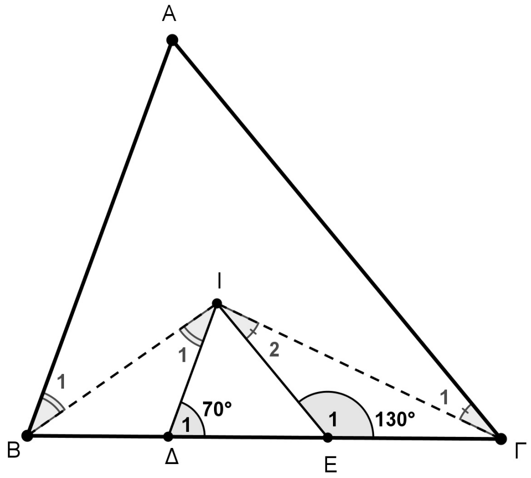
Επειδή είναι $ΙΕ//ΑΓ$, θα ισχύει: $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{Γ}, \hat{Ε}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΕ, ΑΓ$ τεμνομένων από την $ΕΓ$).

Οι γωνίες $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^o - \hat{Β} - \hat{Γ} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $ΙΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $ΙΔ//ΑΒ$, θα ισχύει: $\hat{Ι}_1 = \hat{Β}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{Ι}_1, \hat{Β}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΔ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΙΒ$.



Σχήμα 1

Εφόσον $ΙΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισχύει: $\hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $ΙΕ//ΑΓ$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Ι}_2 = \hat{Γ}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{Ι}_2, \hat{Γ}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΕ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΙΓ$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.
Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.
α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

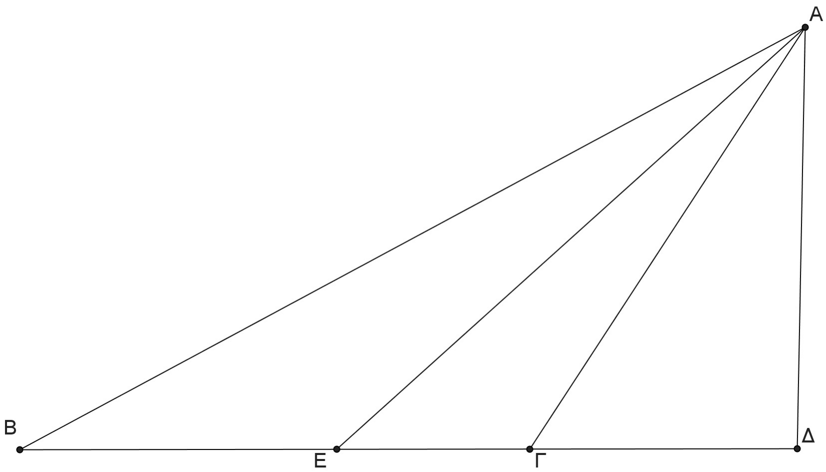
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{\text{Α}} = 180^0 - \left(\hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0.$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\dfrac{\hat{\text{Β}}}{1} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{\text{Β}}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{\text{Β}} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{\text{Β}} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma + \Gamma\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}\text{Α}\right) + \frac{\hat{\text{Α}}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{\text{Α}} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}\text{Α} = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ε} = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4^o

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\dfrac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\dfrac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\dfrac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:
α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1ος τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2ος τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x\,,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$

$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

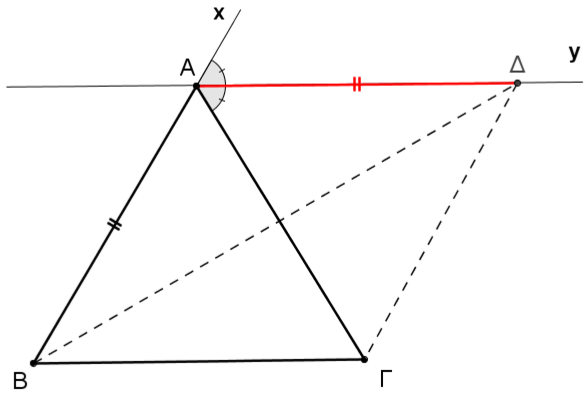
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\mathrm{A}y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η $\mathrm{A}y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$ θα είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $\mathrm{A}y \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{\mathrm{B}} = \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 59^0 .$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} . \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $\mathrm{A}y$ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma ,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$\text{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$\text{A} = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \text{A}_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ \text{A}_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ \text{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{Bmatrix},$$

οπότε ο αριθμός $\text{A}_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $\text{A}_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < \text{A} < 200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100 < \frac{60}{100}\cdot \text{A} < \frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60 < \text{A}_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $\text{A}_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$\text{A} = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$\text{K} = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270 .$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

2007- 2008

Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=(200:8+12\cdot 100)+\left[200:(8+2)+762\right]\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2.$$

Πρόβλημα 2.

Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Πρόβλημα 3.

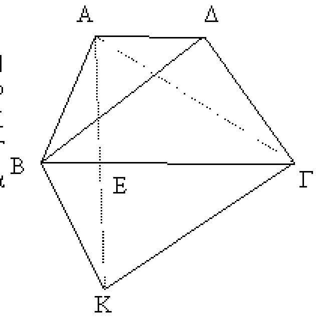
Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και

(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



2006-2007

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

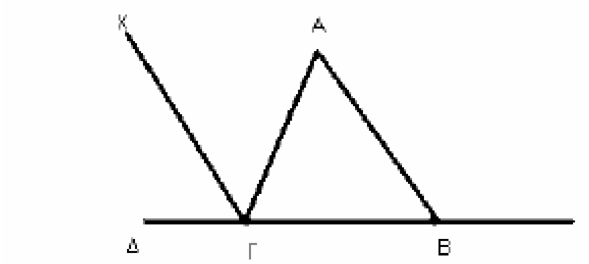
$$A = \left\{111 - \left[264 - (15 + \frac{54}{6}) \cdot |-5|\right] : 12\right\} : 11 + 1$$

2. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

3. Το 6% του αριθμού α≠0 είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος.

$$\kappa = \frac{9\alpha - 3\beta}{6\alpha - \beta}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



2005-2006

1. Να υπολογισθεί το 3,6% του αριθμού

$$A = \frac{3 + \frac{4,2}{0,1}}{(\frac{1}{0,3} - \frac{7}{3}) \cdot 0,3125}.$$

2. Ο Γιώργος πήγε στο βιβλιοπωλείο έχοντας € 20. Στο μαγαζί υπάρχουν δύο είδη μολυβιών. Η εξάδα του πρώτου είδους κόστιζε € 1,17 ενώ η εξάδα του δευτέρου είδους κόστιζε € 1,60. Πόσες εξάδες κάθε κατηγορίας πρέπει ν' αγοράσει ο Γιώργος έτσι ώστε να πάρει τα λιγότερα ρέστα;

3. Για ποια ψηφία x και y διαιρείται δια του 45 ο αριθμός του οποίου η παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι $\overline{6x12y}$;

4. Έστω $X\hat{O}Y$ μια γωνία 70^0, ΟΑ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της ΟΧ και ΟΒ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της ΟΥ. Να υπολογισθούν τα μέτρα των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}Y$ και $B\hat{O}X$.

2004-2005

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3$$

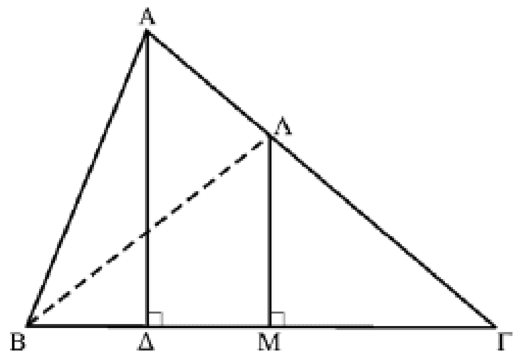
Μονάδες 5

2. Ένας τετραψήφιος αριθμός Κ έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός Κ ***Μονάδες 2***

(β) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός a και φυσικός αριθμός ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: $K = a \cdot 10^{\nu}$, με $1 \le a < 10$. ***Μονάδες 3***

3. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓστο μέσον της Μ. Επιπλέον δίνονται:ΜΓ=5cm, $\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^o$,$\widehat{AB\Lambda} = 30^o$ και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ίσο με $35cm^2$.



Να βρείτε

(α) τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ και

Μονάδες 3

(β) το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 2

4. Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν στις 30-10-2003 ήταν 32 δολάρια το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 δολάρια το βαρέλι.

(α) Πόσο τις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελιού σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;

Μονάδες 2

(β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελιού μέχρι την 30-11-2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30-10-2003;

Μονάδες 3

2003-2004

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

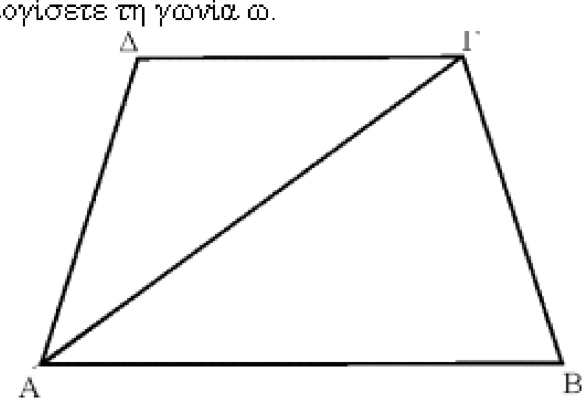
$$A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2 .$$

2. Αν παρατάξουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σε τριάδες περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε τετράδες ή σε πεντάδες, επίσης περισσεύουν 2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθητών, αν δίνεται ότι αυτός είναι τριψήφιος με άθροισμα ψηφίων 5.

3. Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), δίνεται ότι $\widehat{\Delta A B} = \widehat{AB\Gamma} = \omega$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ=ΓΔ.

(i) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta A B}$.

(ii) Να υπολογίσετε τη γωνία ω.



4. Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε το 2001 (από 1-1-2001 μέχρι και 31-12-2001) κατά 20%. Στη συνέχεια το 2002 μειώθηκε κατά 10%, ενώ το 2003 αναμένεται αύξηση κατά 25%.

(i) Να προσδιορίσετε το ποσοστό επί τις εκατό, της μεταβολής της τιμής του προϊόντος κατά την τριετία από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2003.

(ii) Αν η τιμή του προϊόντος ήταν 1,6€ την 1-1-2001, ποια θα είναι η τιμή του την 31-12-2003.

2002 – 2003

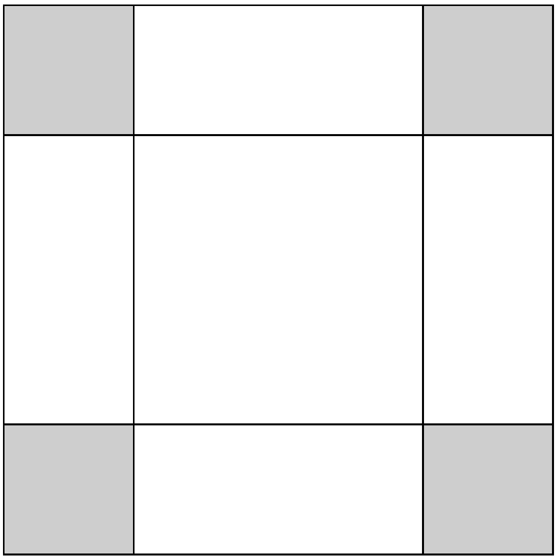
ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = 2 \cdot 50 - 40 : 10 + 5 \cdot (100 - 4 \cdot 20)^2 - 92$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1. Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιό είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι αριθμοί : $A = 2^{41}$, $B = 8^{13}$, $\Gamma = 4^{21}$ και $\Delta = 32^{8}$.

(i) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.

(ii) Να εκφράσετε το άθροισμα Α+Β+Γ+Δ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΘΕΜΑ 4ο

Στις Δημοτικές εκλογές της πρώτης Κυριακής (13 Οκτωβρίου 2002) σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α,Β και Γ. Ονομάζουμε ν τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού ν και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα.

Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού ν, ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού ν. Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

(i) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος από την πρώτη Κυριακή, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

(ii) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Γ ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

2000- 2001

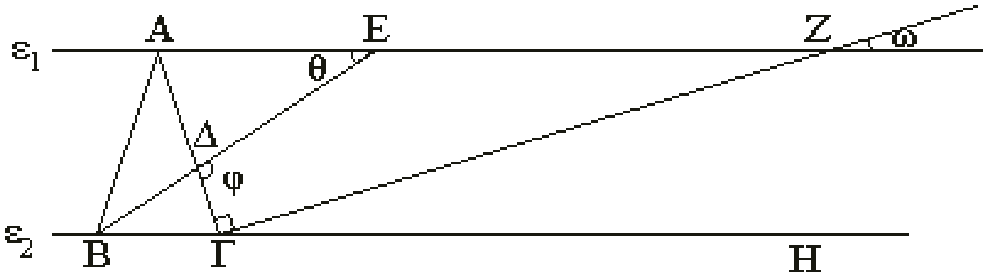
1. Δίνονται οι παραστάσεις

$$\mathbf{A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1} \quad \text{και} \quad \mathbf{B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)}$$

Να βρεθούν οι Α, Β και να συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}$, $\frac{22B}{A}$.

2. Του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΒΓ || ΑΔ) δίνονται:
(α) ΑΒ = ΓΔ = 12 μέτρα
(β) Η περίμετρός του 54 μέτρα
(γ) Το εμβαδόν του Ε = 120 τ.μ.
Να βρείτε το ύψος του υ.

3.



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται:
(α) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
(β) ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ) με $B\hat{A}\Gamma = 20°$
(γ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$
(δ) $\Gamma Z \perp A\Gamma$

Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = \Gamma\hat{\Delta}E$, $\theta = A\hat{E}\Delta$ και ω.
Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες ΒΕ και ΓΖ δεν είναι παράλληλες.

4. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{2001}{2000}, \qquad B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2000} .$$

Να βρείτε τον αριθμό Α – Β.

1999 – 2000

1. Πάνω σε μια ευθεία ε θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, με τη σειρά που δίνονται. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ και Ν είναι το μέσον του ΒΓ, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ, όταν:

α) ΑΒ = 8cm, ΒΓ = 10cm,

β) ΑΒ = 10cm, ΑΓ = 18cm.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι:

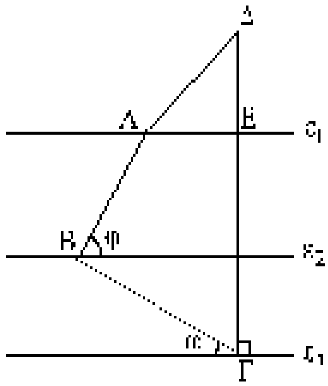
i. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$

ii. $\Gamma\Delta \perp \varepsilon_3$

iii. ΑΕ = ΕΔ

iv. $\hat{\omega} = 30°$ και $\hat{\varphi} = 50°$.

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



3. Δίνονται οι αριθμοί:

$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499}$, και $B = 2^{\nu} \cdot 3^{\nu+1}$, όπου ν άρτιος φυσικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί $3 \cdot A^{\nu}$ και Β.

4. Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (μέσος όρος των α, β), αν είναι

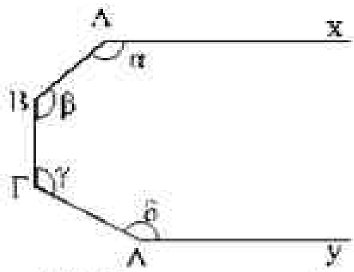
$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999},$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \ldots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

mathematica.gr

1998 - 1999

1. Στο σχήμα,



όπου η ευθεία Αx είναι παράλληλη προς την Δy, να υπολογισθεί το άθροισμα των γωνιών α, β, γ και δ.

2. Ένα δοχείο, όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες.

3. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}$$

είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

4. Ν' αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.